Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Vorlesung von Prof. Dr. Eberhard Freitag/Dr. Thomas Wieber

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Analysis auf Vektorräumen **5**

§1 Differentialrechnung 5
§2 Topologische Grundbegriffe 9
§3 Radonmaße 10
§4 Daniell-Lebesgue Prozess 12

Kapitel 2: Glatte Mannigfaltigkeiten **19**

§1 Karten & glatte Abbildungen 19
§2 Tangentialraum 26
§3 Eingebettete Untermannigfaltigkeiten 32
§4 Vektorfeld 34
§5 Differentiale 39
§6 Multilineare Algebra 46
§7 Alternierende Differentialformen 59
§8 Der de-Rham Komplex 67
§9 Orientierung 73
§10 Partition der Eins und Integrale 78
§11 Der Satz von Stokes 85

Kapitel 3: Riemmann'sche Mannigfaltigkeiten **91**

§1 Riemann'sche Metriken 91
§2 Der $*$-Operator 96
§3 de Rham-Laplace-Operator 104
§4 Hodge-Zerlegung 109
§5 Der euklidische Torus 120

Kapitel 4: Krümmung **123**

§1 Vektorbündel & Zusammenhänge 123
§2 Riemann'sche Krümmung 132

Kapitel 1: Analysis auf Vektorräumen

§1 Differentialrechnung

1.1 Erinnerung

Sei E ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \geq 0$, genannt die Dimension von E ($\dim E = n$), sodass E isomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $\sigma : E \to \mathbb{R}^n$ ein solcher Isomorphismus, dann heißt eine Teilmenge $U \subseteq E$ offen, wenn die ihr entsprechende Menge $\sigma(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Diese Definition hängt offensichtlich nicht von der Wahl des Isomorphismus ab (vgl. 1.9 Seite 22). Ferner lassen sich analog andere topologischen Begriffe (Abgeschlossenheit, Konvergenz, Umgebung, Kompaktheit, Stetigkeit...) vom $\mathbb{R}^n$ auf beliebige endlich dimensionale Vektorräume übertragen.
Unter einer Norm $||\cdot||$ auf E versteht man eine Abbildung, die jedem Vektor $a \in E$ eine nicht-negative reelle Zahl $||a||$ zuordnet, sodass für $a, b \in E$, $c \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $||c \cdot a|| = |c| \cdot ||a||$
(ii) $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$
(iii) $||a|| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Eine solche Norm lässt sich durch die Übertragung einer Standardnorm des $\mathbb{R}^n$ mittels eines Isomorphismus $\sigma : E \to \mathbb{R}^n$ konstruieren. Derart konstruierte Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind offensichtlich äquivalent (d.h. es gibt Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$: $||a||_1 \leq c_1||a||_2, ||a||_2 \leq c_2||a||_1$).

1.2 Definition

Seien $U \subseteq E$ offen, $V \subseteq F$ offen, $a \in U$ und $f : U \to V$, dann heißt f differenzierbar in a, falls es eine lineare Abbildung $J(f,a) : E \to F$ gibt, s.d.

$$f(x) - f(a) = J(f,a)(x-a) + r(x)$$

wobei $\frac{r(x)}{||x-a||} \overset{x \to a}{\to} 0$ (unabhängig von der gewählten Norm).

1.3 Beispiel

(i) $V = W = \mathbb{R}$: $J(f,a)(x-a) = f'(a)(x-a)$

(ii) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$: $J(f,a) \leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$,
$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) + r(x)$

(iii) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$
f differenzierbar $\Leftrightarrow$ alle f_i differenzierbar $(i = 1, ..., m)$

$$J(f,a) : \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}, \text{ zugehörige (Funktional-) Matrix}$$

Bemerkung

Für die einer Matrix A zugeordnete lineare Abbildung L_A ist es nützlich die Elemente von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ ausnahmsweise als Spaltenvektoren zu schreiben, dann ist nämlich $L_A(x) = A \cdot x$ wobei $A \cdot x$ das gewöhnliche Matrixprodukt bezeichnet. Demnach gilt

$$L_A(x) = y \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

und es wird häufig $A(x)$ oder Ax anstelle von $L_A(x)$ geschrieben.

1.4 Satz (Kettenregel)

Seien E, F, G endli. dim. $\mathbb{R}$-VR, $U \subseteq E$, $V \subseteq F$, $W \subseteq G$ alle offen, $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G$ und $a \in U$. Wenn nun f in a differenzierbar ist und g in $f(a)$ diff'bar ist, dann ist $g \circ f : U \to W$ in a differenzierbar mit $J(g \circ f, a) = J(g, f(a)) \cdot J(f,a)$.

1.5 Definition

(i) Seien $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ beide offen, $f : U \to V$, $J(f, a) \in \mathrm{Hom}(E, F)$, dann heißt f stetig differenzierbar, falls f für alle $a \in U$ differenzierbar ist und die Abbildung $U \to \mathrm{Hom}(E, F), a \mapsto J(f, a)$ stetig ist

(ii) $C^k(U, V) =$ Menge aller k-fach stetig diff'baren Abbildungen $U \to V$, $k \in \mathbb{N}$

(iii) $C^\infty(U, V) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, V)$

(iv) $C^0 = \{f : U \to V \mid f \text{ ist stetig}\}$

1.6 Definition

Seien $U, V \subseteq E$ offen, $f : U \to V$, dann heißt f Diffeomorphismus, wenn

(i) f bijektiv ist

(ii) $f \in C^k$

(iii) $f^{-1} \in C^k$

Beispiel

$E = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ bijektiv, aber $\sqrt[3]{x}$ nicht differenzierbar in 0

1.7 Satz für umkehrbare Funktionen

Sei E endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-VR und f eine k-fach stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilmengen U und V von E, also $f \in C^k(U, V)$, $k \geq 0$. Sei weiter $J(f, a)$für einen Punkt $a \in U$ ein Isomorphismus, dann existiert eine kleine offene Umgebung $a \in U_0 \subseteq U$, s.d. $V_0 = f(U_0)$ ebenfalls offen ist und $U_0 \overset{f|_{U_0}}{\to} V_0$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Zusätzlich gilt dann für die Ableitung der (lokalen) Umkehrabbildung $g : V_0 \to U_0$

$$J(g, f(x)) = J(f, x)^{-1}$$

(Durch Anwendung der Kettenregel auf $g(f(x))$)

Als Folgerung aus dem Satz für umkehrbare Funktionen erhält man den Satz für implizite Funktionen. Dazu wird ausgenutzt, dass eine $m \times n$-Matrix A vom Rang m zu einer quadratischen, invertierbaren Matrix $\tilde{A} = \binom{A}{B}$ ergänzt werden kann.

Dazu seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ beide offen, $f : U \to V$ stetig differenzierbar und $a \in U$, s.d. der Rang der Funktionalmatrix $J(f, a)$ gleich m ist (insbesondere ist $m \leq n$). Nun werden die Kompenenten $f_1, ..., f_m$ durch lineare Funktionen $f_{m+1}, ..., f_n$ der Form

$$f_j(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_j \quad (m < j \leq n)$$

ergänzt, s.d. die Funktionalmatrix $J(\tilde{f}, a)$ der Abbildung

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^n, \tilde{f}(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$$

invertierbar ist. Nun kann der Satz für umkehrbare Funktionen auf $\tilde{f}$ angewendet werden.

1.8 Satz für implizite Funktionen

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-differenzierbare Abbildung. Ihre Nullstellenmenge sei

$$X = \{a \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Man nehme an, dass die Funktionalmatrix $J(f, a)$ für jedes $a \in X$ den Rang m habe. Dann gibt es zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $a \in U_0 \subseteq U$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U_0 \to V_0$ auf eine offene Teilmenge $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, s.d.

$$\varphi(X \cap U_0) = \{y \in V_0 \mid y_{n-m+1} = ... = y_n = 0\}.$$

Betrachtet man die Menge

$$W = \{(x_1, ..., x_{n-1}) \mid (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \in V_0\},$$

die offenbar offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n-m}$ ist, stellt man fest, dass φ einen Homöomorphismus $X \cap U_0 \to W$ induziert. X sieht also lokal wie eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n-m}$ aus.

§2 Topologische Grundbegriffe

2.1 Definition

Sei $U \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt U relativ offen in X, wenn es eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, s.d. $V = U \cap X$. Ist $X = \mathbb{R}^n$, so heißt U offen in $\mathbb{R}^n$. Jedoch ist z.B. $(-1, 1]$ offen in $[-1, 1]$, aber nicht in $\mathbb{R}$.

2.2 Definition

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig, genau dann, wenn das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Teilmange $V \subseteq Y$ in X offen ist.
Dabei soll $V \subseteq Y$ offen bedeuten, dass V relativ offen in Y ist.

2.3 Definition

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie in $\mathbb{R}^n$ offener Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit der Eigenschaft $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit der Eigenschaft $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} U_i$ existiert.
Eine äquivalente Definition der Kompaktheit ist durch relative Offenheit gegeben:
Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Familie in K offener Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit der Eigenschaft $K = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit der Eigenschaft $K = \bigcup\limits_{i \in J} U_i$ existiert.

Bemerkung

Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $L \subseteq \mathbb{R}^m$ Teilmengen und es existiere $f : K \to L$ ein Homöomorphismus (d.h. f ist bijektiv, stetig mit stetiger Umkehrabbildung), dann gilt

$$K \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow \; L \text{ ist kompakt.}$$

Eine wichtige Eigenschaft des $\mathbb{R}^n$ (bzw. offener Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$) ist, dass es eine abzählbare Basis der Topologie gibt, d.h. es existiert eine abzählbare Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teile $U_i \subseteq X$, sodass jede offene Teilmenge als Vereinigung von U_i geschrieben werden kann.

§3 Radonmaße

3.1 Erinnerung

Für einen lokal kompakten topologischen Raum X mit abzählbarer Basis der Topologie und eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

Träger der Funktion f. Mit $C^0_C(X)$ bezeichnet man die Menge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Es existiert dann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in C^0_C(X)$ mit K_n, dem Träger von f_n, s.d.

(i) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$
(ii) für festes $x \in X$ ist die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt
(iii) $K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$
(iv) $X = K_1 \cup K_2 \cup ...$ (X ist also σ-kompakt)
Es lässt sich ferner erreichen, dass K_n in dem Inneren von K_{n+1}, K°_{n+1}, liegt.

3.2 Definition

Ein Radonmaß auf X ist eine lineare Abbildung

$$I : C^0_C(X) \to \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I(f) \geq 0 \,\text{für}\, f \geq 0.$$

Beispiel

Ist $X = \mathbb{R}$, dann ist ein Radonmaß gegeben durch

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Dabei handelt es sich nicht um ein echtes uneigentliches Integral, da f einen kompatken Träger hat. Es genügt also von $-C$ bis C zu integrieren, solange C so gewählt ist, dass $f(x) = 0$ für $|x| \geq C$.
Dieses Radonmaß lässt sich leicht auf den $\mathbb{R}^n$ ausdehnen. Für $f \in C^0_C(\mathbb{R}^n)$ wähle man

dazu $C \in \mathbb{R}$ so, dass f außerhalb von $[-C, C]^n$ verschwindet und definiert

$$I(f) := \int_{-C}^{C} \cdots \int_{-C}^{C} f(x_1, ..., x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

durch iterierte Integrale. Diese Festlegung ist wohldefiniert, denn definiert man rekursiv

$$F_1(x^2, ..., x^n) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x^2, ..., x^n) dt \in C_C^0(\mathbb{R}^{n-1}),$$

da aus $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-C, C]^n$ folgt $\operatorname{supp}(F_1) \subseteq [-C, C]^{n-1}$, und für $i \geq 2$

$$F_i(x^{i+1}, ..., x^n) := \int_{-C}^{C} F_{i-1}(t, x^{i+1}, ..., x^n) dt,$$

dann ist $F_n = I(f)$.

Allgemein verwendet man die Schreibweise

$$I(f) = \int_X f dx.$$

§4 Daniell-Lebesgue Prozess

Man erweitert die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch das Symbol "∞", s.d. die folgenden Rechenregeln gelten:

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$$

$$a \leq \infty \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

4.1 Definition

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt Baire'sch, falls eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in C_C^0(X)$ mit

$$f_1 \leq f_2 \leq ... \text{ und } f(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

existiert. Die Menge der Baire'schen Funktionen wird mit $\mathcal{B}^+(X) = \mathcal{B}^+$ bezeichnet. Man definiert das Baire'sche Integral für $f \in \mathcal{B}^+$ durch

$$I_{\text{Baire}} = \sup\{I(g) \mid g \leq f, g \in C_c(X)\}.$$

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind trivialerweise Baire'sch (durch die Folge $f, f, f, ...$), daher gilt für diese $I_{\text{Baire}} = I(f)$ und man schreibt allgemein einfach $I(f)$.

Bemerkung

(i) Unmittelbar aus der Definition des Baire'schen Integrals folgt

$$f \leq g \;\Rightarrow\; I(f) \leq I(g)$$

(ii) Die Funktion "identisch ∞" ist Baire'sch (vgl. Übungsaufgabe), daher existiert zu jeder Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ein $h \in \mathcal{B}^+$ mit $|f| \leq h$ und man definiert

$$||f||_1 := \text{Inf}\{I(h) \mid h \geq |f|, h \in \mathcal{B}^+\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(iii) $||f||_1$ erfüllt die Eigenschaften:

$$||Cf||_1 = |C| \cdot ||f||_1,\; ||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1,\; ||f|| \geq 0.$$

Damit ähnelt $||\cdot||_1$ stark einer Norm.

Beweis

Übungsaufgabe.

4.2 Definition

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_C^0(X)$ gibt, s.d.

$$||f - g||_1 < \epsilon.$$

Die Menge aller integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(X, dx)$ bezeichnet.

Bemerkung

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ existiert eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s.d. $||f - f_n||_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und gegen Null konvergiert. Ferner definiert man

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) =: I_{\text{Leb}}(f).$$

Diese Festlegung ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge, denn für eine weitere Folge $(g_m)_m \in \mathbb{N}$ gilt

$$I(f_n) - I(g_m) = I(f_n - g_m) \leq I(|f_n - g_m|) = ||f_n - g_m||_1 \leq ||f_n - f||_1 + ||g_m - f||_1 \to 0,$$

also $\limsup\limits_{n,m\to\infty}(I(f_n) - I(g_m)) \leq 0$.
Analog ist $-\liminf\limits_{n,m\to\infty}(I(f_n) - I(g_m)) = \limsup\limits_{n,m\to\infty}(-I(f_n) + I(g_m)) \leq 0$.
Weiterhin gilt:
Ist $f \in \mathcal{B}^+$ und $I(f) < \infty$ (z.B. $f \in C_c(X)$), so ist $I(f) = I_{\text{Leb}}(f)$.
Daher verwendet man für beliebige integrierbare Funktionen die Bezeichnung

$$I_{\text{Leb}}(f) = I(f) = \int_X f dx.$$

4.3 Theorem

$(\mathcal{L}^1(X, dx), I)$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mathcal{L}^1(X, dx)$ ist ein Vektorraum.

(ii) Das Integral I ist linear.

(iii) Das Integral ist positiv derart, dass $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$.

(iv) $f \in \mathcal{L}^1(X, dx) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(X, dx)$.

(v) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ und es existiere eine Nullmenge $A \subseteq X$ (d.h. $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ mit $I(\mathbb{1}_A) = 0$), s.d. f und g außerhalb von A übereinstimmen. Es gilt dann

$$f \in \mathcal{L}^1(X, dx) \;\Leftrightarrow\; g \in \mathcal{L}^1(X, dx)$$

und falls $f, g \in \mathcal{L}^1(X, dx)$

$$\int_X f dx = \int_X g dx.$$

(vi) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, s.d. die Folge der Integrale $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann ist existiert eine Nullmenge $A \subseteq X$, s.d. $f_n(x)$ für alle x außerhalb von A konvergiert und die durch

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & x \notin A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion ist integrierbar mit

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x).$$

(Satz von Beppo Levi oder Satz über die monotone Konvergenz)

(vii) Sei $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent mit $f_n \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ und es existiere eine integrierbare Funktion g, s.d.

$$|f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \forall\, x \in X, n \in \mathbb{N},$$

dann ist die Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ integrierbar und es gilt

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x).$$

(Lebesgue'scher Grenzwertsatz oder Satz über die dominierte Konvergenz)

(viii) Eine Funktion f heißt messbar, wenn für jedes $h \in C_c(X)$, $h \geq 0$ die abgeschnittene Funktion

$$f_h(x) := \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq h(x), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Für messbare Funktionen f, g und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen sind $f+g$ messbar und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar. Ferner sind stetige Funktionen messbar.

(ix) Ist f stetig auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$, dann ist f messbar, und ist f stetig auf einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$, so ist f messbar.

(x) Für integrierbare Funktionen gilt

$$||f||_1 = \int_X |f| dx.$$

4.4 Satz von Fubini

Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion (dabei ist $X \times Y$ der Produktraum mit Produktmaß $dxdy$ analog zu $\mathbb{R}^n$), dann ist die Menge aller $y \in Y$, für welche $f(x, y)$ als Funktion auf X nicht integrierbar ist eine Nullmenge $B \subseteq Y$. Definiert man für diese Ausnahmemenge (nur für die Zwecke dieses Satzes)

$$\int_X f(x, y) dxdy := 0 \quad \text{für } y \in B$$

so gilt, dass die erhaltene Funktion von x integrierbar ist. Ebenso kann man die Rollen von x und y vertauschen, s.d. insgesamt gilt

$$\int_{X\times Y} f(x, y) dxdy = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Definition

Bezeichnet man mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Nullfunktionen $f : X \to \mathbb{R}$ (d.h. $f \equiv 0$ außerhalb von Nullmengen), dann ist $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}^1(X)$ ein Untervektorraum und man hat eine Äquivalenzrelation

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f - g \in \mathcal{N},$$

d.h. f und g sind äquivalent, wenn sie außerhalb einer geeigneten Nullmenge übereinstimmen. Für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ bezeichnet dann

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1(x) \mid g \sim f\}$$

die Äquivalenzklasse von f und es ist einfach ersichtlich, dass die Festlegungen

$$[f+g] := [f] + [g],\ [Cf] := C[f]$$

nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen. Ebenso ist auch

$$||[f]||_1 := ||f||_1$$

unabhängig von der Wahl des Repräsentanten definierbar.

Bemerkung

Da es auf Nullfunktionen oftmals nicht ankommt betrachtet man den Faktorraum

$$L^1 := \mathcal{L}^1 / \mathcal{N},$$

der gerade die Menge aller Äquivalenzklassen ist und durch die festgelegten Operationen wieder zu einem Vektorraum wird. Ferner gilt durch die Bildung des Faktorraums jetzt

$$||f||_1 = ||[f]||_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ [f] = 0,$$

d.h. $L^1(X)$ ist durch $||\cdot||_1$ sogar ein normierter Raum.

4.5 Satz

$(L^1(X), ||\cdot||_1)$ ist ein Banachraum, d.h. wenn für eine Folge integrierbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $||f_n - f_m||_1 < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$, dann gibt es eine integrierbare Funktion f mit $||f - f_n||_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Hierbei ist auf den Zusammenhang zwischen $||\cdot||_1$-Konvergenz und punktweiser Konvergenz hinzuweisen.

4.6 Satz

Seien $(f_n)_{n\in}$ eine Folge integrierbarer Funktionen und f eine weitere integrierbare Funktion mit $||f - f_n||_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dann gibt es eine Teilfolge (f_{n_ν}), welche außerhalb einer geeigneten Nullmenge punktweise gegen f konvergiert.

Der Raum $\mathcal{L}^1(X)$ lässt sich auch etwas allgemeiner für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definieren:

$$\mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p := \{f : X \to \mathbb{R}\,\text{messbar} \mid f^p \text{ integrierbar}\}$$

Dabei stimmt für $p = 1$ diese Definition natürlich mit dem ursprünglichen $\mathcal{L}^1$ überein. Für $f \in \mathcal{L}^p$ definiert man nun die Abbildung

$$||f||_p := \sqrt[p]{\int_X |f|^p dx}.$$

Für diese gilt analog zur Dreiecksungleichung die Minkowski'sche Ungleichung

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Ergänzend definiert man noch $\mathcal{L}^\infty(X)$ durch einen erweiterten Beschränktheitsbegriff. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt im Wesentlichen beschränkt, falls es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, s.d. $|f(x)| \leq C$ außerhalb einer geeigneten Nullmenge ist. Damit setzt man

$$\mathcal{L}^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{R}\,\text{messbar} \mid f \text{ ist im Wesentlichen beschränkt}\}$$

und

$$||f||_\infty := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid f \text{ wird durch } C \text{ im Wesentlichen beschränkt}\}.$$

Die Menge aller Nullfunktionen $\mathcal{N}$ ist dann wieder ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$ und mit

$$L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N}$$

ist $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ normierter Raum.

4.7 Satz

$(L^p(X), ||\cdot||_p)$ ist ein Banachraum für $1 \leq p \leq \infty$

Bemerkung

Ein besonders wichtiger Fall ist dabei $p = 2$, da für $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$ fg integrierbar ist und somit ein Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)g(x)dx$$

definiert werden kann. Ferner gilt dann

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

und die Minkoswki'sche Ungleichung folgt aus der Cauchy-Schwartz'schen Ungleichung.

4.8 Definition

Ein Prähilbertraum ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt, d.h. einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform.
Ein Hilbertraum ist ein Paar $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bestehend aus einem Vektorraum H und einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform, s.d. $(H, x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle})$ ein Banachraum ist.

4.9 Satz

$(L^2(X), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum.

4.10 Transformationssatz

Sei φ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen U und V des $\mathbb{R}^n$ und $f : V \to \mathbb{R}^n$ integrierbar, dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(\varphi(x))|\det J(\varphi, x)|$ integrierbar und es gilt

$$\int_U f(\varphi(x))|\det J(\varphi, x)|dx = \int_V f(y)dy.$$

Kapitel 2: Glatte Mannigfaltigkeiten

§1 Karten & glatte Abbildungen

1.1 Definition

Sei X ein lokal kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Eine Karte auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ mit $U_\varphi \subseteq X$ offen und $V_\varphi \subseteq \mathbb{R}^{n_U}$ offen für ein geeignetes n_U.

1.2 Definition

Sei X lokal kompakt mit abzählbarer Basis der Topologie, dann heißt X topologische Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt $x \in X$ in einer Karte enthalten ist.

Bemerkung

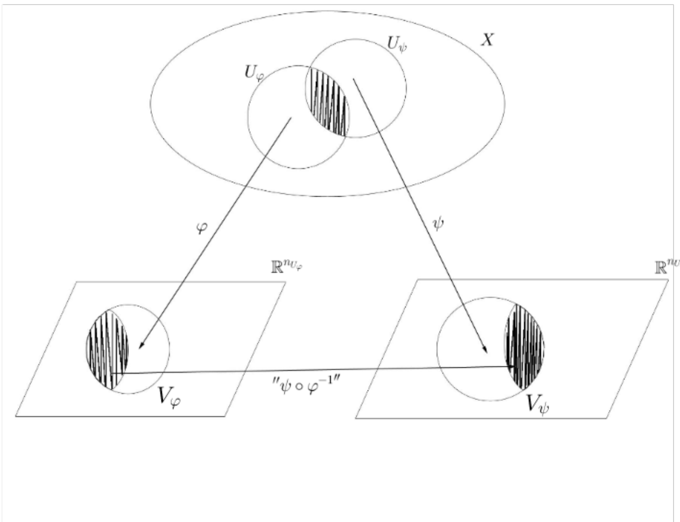
Für zwei Karten $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$, $\psi : U_\psi \to V_\psi$ auf X sind $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$ bzw. $\psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ offen in V_φ bzw. V_ψ und die Abbildung

$$\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \xrightarrow{\sim} \psi(U_\varphi \cap U_\psi), x \mapsto \psi \circ \varphi^{-1}$$

ist ein Homöomorphismus. Dieser heißt Kartenwechselabbildung und wird einfach mit

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \xrightarrow{\sim} \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

bezeichnet.



1.3 Definition

Zwei Karten heißen differenzierbar verträglich, falls die Kartenwechselabbildung ein Diffeomorphismus ist.
Im Folgenden soll Differenzierbarkeit bzw. Glätte immer im C^∞-Sinne verstanden werde.

1.4 Definition

Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf X ist eine Menge von Karten, deren Definitionsbereiche X gänzlich überdecken

$$X = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} U_\sigma.$$

1.5 Definition

Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt glatt, wenn je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind.

1.6 Definition

Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen differenzierbar verträglich, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein glatter Atlas ist, d.h. dass jede Karte aus $\mathcal{B}$ mit jeder Karte aus $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich ist.

Offensichtlich liefert diese Definition eine Äquivalenzrelation $\mathcal{A} \sim_d \mathcal{B}$.

1.7 Definition

Eine glatte Struktur auf X ist eine Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]_d$ differenzierbar verträglicher Atlanten.

1.8 Definition

Eine glatte Mannigfaltigkeit $(X, [\mathcal{A}]_d)$, ist ein topologischer Raum X (lokal-kompakt, mit abzählbarer Basis der Topologie) auf dem eine glatte Struktur erklärt ist.
Vereinfacht schreibt man $(X, \mathcal{A})$ statt $(X, [\mathcal{A}]_d)$.
Für zwei Atlanten gilt dabei $(X, \mathcal{A}) = (X, \mathcal{B})$, wenn $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ differenzierbar verträglich sind.

Beispiel

(i) Einsteins Raumzeit (spacetime) ist eine vierdimensionale, semi-Riemann'sche (glatte) Mannigfaltigkeit.
(ii) Seien $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $Z(f) := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ und gilt zusätzlich $Z(f) \cap Z(f') = \emptyset$, dann ist $Z(f)$ eine Mannigfaltigkeit. Für einen Beweis betrachte man den Satz über implizite Funktionen für Mannigfaltigkeiten (Seite 33).

Bemerkung

Sei $X_0 \subseteq X$ offen. Nun kann auch X_0 die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit gegeben werden. Betrachte hierzu $\varphi : U \to V$ eine Karte auf X und definiere

$$\varphi\big|_{X_0} : U \cap X_0 \to \varphi(U \cap X_0)$$

und

$$\mathcal{A}\big|_{X_0} := \{\varphi\big|_{X_0} \mid \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{A} \text{ ist differenzierbar } \Rightarrow \mathcal{A}\big|_{X_0} \text{ ist differenzierbar}$$

und somit ist $(X_0, [A\big|_{X_0}]_d)$ eine glatte Mannigfaltigkeit.
Weiterhin gilt

$$\mathcal{A} \sim_d \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\big|_{X_0} \sim_d \mathcal{B}\big|_{X_0},$$

also ist die Einschränkung der glatten Struktur eindeutig bzw. wohldefiniert, d.h. $[\mathcal{A}\big|_{X_0}]_d = [\mathcal{A}]_d\big|_{X_0}$. Damit ist $(X_0, [\mathcal{A}]_d\big|_{X_0})$ eindeutig bestimmt und wird (glatte) Untermannigfaltigkeit genannt.

1.9 Bemerkung

Sei E ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist E auch eine glatte Mannigfaltigkeit mittels einer linearen, bijektiven Abbildung $\sigma : E \to \mathbb{R}^n$.
Diese induziert mit Hilfe der $\mathbb{R}^n$-Standardtopologie eine Topologie $\mathcal{T}$ auf E, d.h.

$$U \subseteq E \text{ ist offen } :\Leftrightarrow \ \sigma(U) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist offen}$$

$\Rightarrow$ σ ist ein Isomorphismus von $(E, \mathcal{T})$ nach $\mathbb{R}^n$, insbesondere erbt $(E, \mathcal{T})$ lokale Kompaktheit und abzählbare Basis der Topologie von $\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow$ $(E, \{\sigma\})$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit (und insbesondere glatt, da σ die einzige Karte ist).
Ferner ist diese Konstruktion eindeutig, denn wenn $\rho : E \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls linear und bijektiv ist, dann ist auch $\tau := \rho \circ \sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, bijektiv und damit stetig bzgl. Standardtopologie
$\Rightarrow$ τ ist ein Homöomorphismus
Betrachte nun $\rho = \rho \circ \sigma^{-1} \circ \sigma = \tau \circ \sigma$, also ist für $\rho(U) = (\tau \circ \sigma)(U) = \tau(\sigma(U))$. Nach Konstruktion gilt also

$$\sigma(U) \text{ ist offen } \Rightarrow \ \rho(U) \text{ist offen.}$$

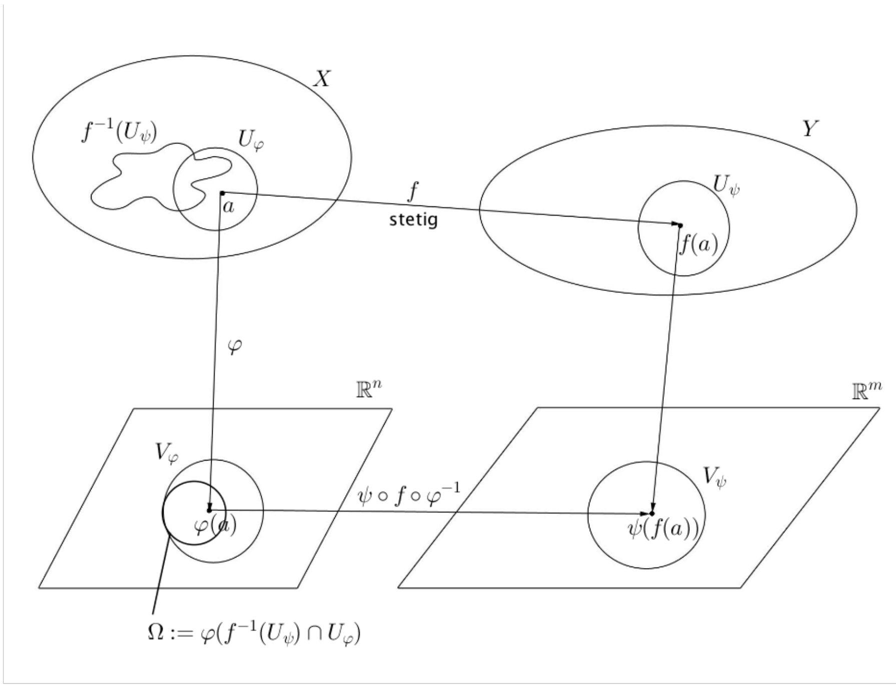
Mit anderen Worten vermitteln σ und ρ die gleiche Topologie auf E und da τ die Kartenwechselabbildung von σ, ρ ist sind $\{\sigma\}, \{\rho\}$ differenzierbar verträglich.

1.10 Definition

Sei $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ stetig und $a \in X$ beliebig. Wähle (φ, U_φ) auf X und (ψ, U_ψ) auf Y, s.d. $a \in U_\varphi$ und $f(a) \in U_\psi$. Definiert man

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \to V_\psi, x \mapsto \psi(f(\varphi^{-1}(x))),$$

dann heißt f glatt in a, wenn $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatt ist für alle Karten mit $a \in U_\varphi$, $f(a) \in U_\psi$.
f heißt glatt auf X, wenn f glatt in allen Punkten $a \in X$ ist.



Bemerkung

Es reicht aus für jeden Punkt a die Bedingung für eine einzige Karte $(\varphi, U_\varphi) \in \mathcal{A}$ und eine einzige Karte $(\psi, U_\psi) \in \mathcal{B}$ zu prüfen, denn:
Für weitere $\sigma \in \mathcal{A}$ und $\rho \in \mathcal{B}$ gilt

$$\rho \circ f \circ \sigma^{-1} = \underbrace{\rho \circ \psi^{-1}}_{\text{KWA}} \circ \underbrace{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}_{\text{glatt nach Vor.}} \circ \underbrace{\varphi \circ \sigma^{-1}}_{\text{KWA}}$$

ist glatt.

Für glattes $f : X \to Y$ schreibt man $f \in C^\infty(X, Y)$ und definiert

$$f \text{ heißt Diffeomorphismus } :\Leftrightarrow f \text{ ist bijektiv und } f \in C^\infty(X,Y),\ f^{-1} \in C^\infty(Y,X).$$

Beispiel

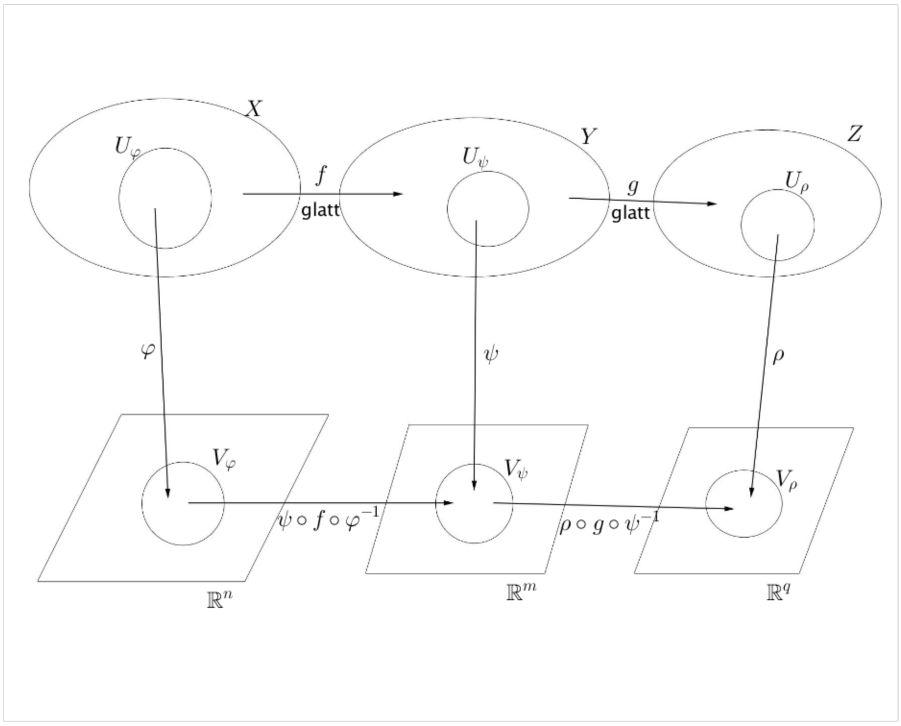
(i) $\mathrm{id}_M : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}) \in C^\infty(M, M)$, denn: $\psi \circ \mathrm{id}_M \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$ ist Kartenwechselabbildung
(ii) $\sqrt[3]{x} : (\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, x^3) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn:

$\sqrt[3]{x}$ ist offensichtlich bijektiv mit Umkehrbabbildung x^3 und $x^3 \circ \sqrt[3]{x} \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist offensichtlich glatt. Ebenso ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ x^3 \circ \sqrt[3]{x} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ glatt

1.11 Bemerkung

Die Verkettung von glatten Funktionen ist glatt, denn für glatte $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$, $g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ gilt für (φ, U_φ) auf X, (ψ, U_ψ) auf Y und (ρ, U_ρ) auf Z

$$\rho \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\rho \circ g \circ \psi^{-1}}_{\text{glatt nach Vor.}} \circ \underbrace{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}_{\text{glatt nach Vor.}}$$



1.12 Bemerkung

Seien $X_0 \subseteq X$ glatte offene Untermannigfaltigkeit (X glatt) und

$$\iota : X_0 \to X, x \mapsto x$$

die kanonische Injektion (offensichtlich eine glatte Abbildung), dann gilt für eine glatte Mannigfaltigkeit Y und $f : Y \to X_0$

$$f \text{ ist glatt } \Leftrightarrow \iota \circ f \text{ ist glatt.}$$

Beweis

Übungsaufgabe.

§2 Tangentialraum

Als Motivation zur Definition des Tangentialraums dient die Frage nach der Ableitung glatter Abbildungen und in diesem Zusammenhang nach Aussagen über inverse/implizite Funktionen. Ferner wird der Tangentialraum ermöglichen Winkel und Entfernungen auf Mannigfaltigkeiten zu messen (vgl. Kapitel 3 Riemann'sche Metriken).
Beispielhaft stelle man sich Punkte auf der Sphäre $\mathcal{S}^2$ vor und die physikalischen Kräfte, die auf den Punkt wirken. Dann sind die Kraftvektoren gerade die Tangentialvektoren des Punktes.

2.1 Definition

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Ein Tangentialvektor in a ist eine Familie von Abbildungen $(A_U)_U$, $a \in U \subseteq X$ offen

$$A_U : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) A_U ist $\mathbb{R}$-linear

(ii) A_U genügt der Leibnitz'schen Produktregel

$$A_U(fg) = f(a)A_U(g) + A_U(f)g(a)$$

(iii) A_U ist verträglich mit Einschränkungen

$$A_U(f) = A_V(f\big|_V) \quad a \in V \subseteq U$$

Genügt A_U nur den Bedingungen (i), (ii), dann nennt man A_U eine Derivation. Die zusätzlich Bedingung (iii) wird auch Lokalität genannt.

Beispiel

$X = \mathbb{R}^n$, $A = (A_U)_U$, $A_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_a : C^\infty(U) \to \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ für ein $i \in \{1, ..., n\}$

2.2 Bemerkung

Die Menge der Tangentialvektoren in a heißt Tangentialraum in a und wird mit T_aX bezeichnet. Mit der offensichtlichen Operation

$$(\lambda A + \mu B)(f) := \lambda \cdot A(f) + \mu \cdot B(f)$$

ist T_aX ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bemerkung

(i) Sei $a \in \Omega \subseteq X$, dann gilt

$$T_aX \cong T_a\Omega \quad \text{(bzgl. Vektorraumisomorphie)},$$

denn sei $(A_U)_U \in T_aX$ dann ist

$$A_U(f) = A_{U\cap\Omega}(f\big|_{U\cap\Omega}) \quad \text{und } a \in U \cap \Omega.$$

(ii) Seien A_U und B_V Derivationen auf $C^\infty(U)$ bzw. $C^\infty(V)$ mit $a \in U \cap V$, dann gilt

$$A_U \sim B_V, \text{ falls } A_U(f) = B_V(f) \text{ für } f \in C^\infty(U \cup V).$$

Somit sind alle Derivationen A_U aus $A = (A_U)_U$ äquivalent, denn

$$A_U(f) = A_{U\cap V}(f\big|_{U\cap V}) = A_V(f)$$

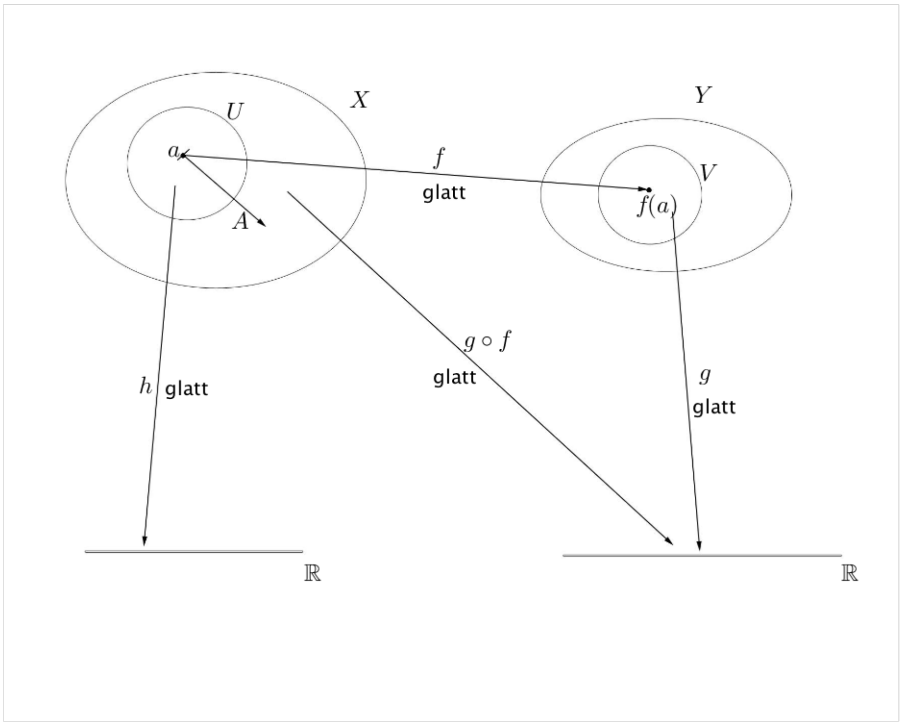
unter Ausnutzung der Lokalität. Insbesondere ist $(A_U)_U$ durch eine einzige offene Umgebung Ω determiniert.

Definition

Seien X, Y glatte Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ offen und $a \in U$ ein fixierter Punkt. Seien weiterhin A der Tangentialvektor in a, h eine glatte Abbildung mit $T_aX \ni A : h \to \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ und $g : V \to \mathbb{R}$ glatte Abbildungen, s.d $f(a) \in V \subseteq Y$ offen ist, dann ist $g \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ glatt und damit $B_V(g) := A_{f^{-1}(V)}(g \circ f) \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.
$(B_V)_{f(a)\in V} := (A_{f^{-1}(V)}(\cdot \circ f))_V$ ist Tangentialvektor in $T_{f(a)}Y$, man schreibt $B = T_af(A)$.
Die Abbildung

$$T_af : T_aX \to T_{f(a)}Y, (A_U)_U \mapsto (A_{f^{-1}(V)}(\cdot \circ f))_V$$

heißt pushforward entlang f in a. (Alternative Notation: df_a, f_*)



Bemerkung

(i) T_af ist linear und $T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_a(f)$.
Betrachte: $a \in \Omega \subseteq X$ offen, $\iota : \Omega \to X$ die natürliche Injektion und $V \subseteq X$ offen, beliebig, dann ist

$$T_a\iota : T_a\Omega \to T_aX$$

ein Isomorphismus, da $\iota^{-1}(V) = V \cap \Omega$

(ii) Seien X, Y Mannigfaltigkeiten, $f : X \to Y$ Diffeomorphismus, dann ist T_af ein Isomorphismus $\forall\, a \in X$, da $\mathrm{id}_Y = f \circ f^{-1}$ (wichtiges Beispiel sind Karten).

2.3 Satz

Sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann bildet $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a\right\}_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von $T_a\mathbb{R}^n$

Beweis

(i) Ist $f = C$ konstant $\Rightarrow A(f) = C \cdot A(1) = 0$, da $1 = 1 \cdot 1$.

(ii) Ist $f(a) = 0 = g(a) \Rightarrow A(fg) = \underbrace{f(a)}_{=0} A(g) + A(f) \underbrace{g(a)}_{=0} = 0.$

(iii) Sei oBdA: $a = 0$ (da die Translation $x \mapsto x - a$ ein Diffeomorphismus ist).
Seien nun $A \in T_0\mathbb{R}$, $x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$, $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^i$
$a^i := A(x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) = A(x^i)$
z.z.: $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0 = (a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_0$ Einstein'sche Summenkonvention)
Nach Satz von Taylor: $f(x) = f(0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)x^i + \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} x^i x^j g_{ij}(x)$, $g_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
$\Rightarrow A(f) = \underbrace{A(f(0))}_{=0 (i)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} A(x^i) + \sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} \underbrace{A(x^i x^j g_{ij})}_{=0 (ii)}$
$\Rightarrow A(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{A(x^i)}_{=a^i \in \mathbb{R}}$

$\square$

2.4 Bemerkung

Seien E endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $a \in U \subseteq E$ offen, dann ist die Richtungsableitung längs $v \in E$

$$\partial_v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$$

für $f \in C^\infty(U)$ definiert als

$$\frac{d}{dt} f(a + tv)\Big|_{t=0} =: \partial_v f.$$

"$\Rightarrow$" $\partial_v \in T_a E$, also

$$\partial. : E \to T_a E, v \mapsto \{f \mapsto \partial_v f = Df(v)\}$$

ist linear.

Lemma

$\partial.$ ist ein Isomorphismus.

Beweis

Aus $T_a E \cong T_{\sigma(a)}\mathbb{R}^n$ und $\dim T_{\sigma(a)}\mathbb{R}^n = n$ folgt $\dim E = \dim T_a E$.
Ferner ist $\partial.$ injektiv, denn für $\partial_v = 0$ gilt $\partial_v(x^i) = v^i = 0$ für alle i.

$\square$

2.5 Korollar

Sei $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Karte auf der glatten Mannigfaltigkeit X, dann ist $\dim_{\mathbb{R}} T_aX = n$, denn $T_aX \cong T_{\varphi(a)}V \cong T_{\varphi(a)}\mathbb{R}^n$.
Die Dimension von X im Punkt a ist dann $\dim_a X := \dim T_aX$ und die Abbildung, die jedem Punkt a die Dimesnion in a zuordnet $X \to \mathbb{Z}, a \mapsto \dim_a X$ ist lokal-konstant. Insbesondere gilt also für zusammenhängende X, dass $\dim_a X \equiv C$ kosntant ist.

2.6 Lemma

(i) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ beide offen, $a \in U$ und $f : U \to V$ glatt, dann sind

$$T_aU = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a$$

$$T_{f(a)}V = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(a)}$$

$$T_af\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_a\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\Big|_a \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{f(a)}.$$

Die Jacobi-Matrix $J(f,a) = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$ ist gerade die darstellende Matrix von T_af.

(ii) Sei $\varphi : U \to V$ ein Karte, $T_a\varphi : T_aU \to T_{\varphi(a)}V$ der zugehörige Isomorphismus und

$$T_{\varphi(a)}V = \bigoplus \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(a)},$$

dann ist

$$T_aU = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R} \cdot \frac{\partial(\cdot \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(a)}.$$

Die darstellende Matrix von $T_a\varphi$ bzgl. dieser Basen ist sogar die Identitätsmatrix I_n.

(iii) Seien X, Y glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ glatt. Gibt man T_aX die Basis $\frac{\partial(\cdot\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(a)}$ und $T_{f(a)}Y$ die Basis $\frac{\partial(\cdot\circ\psi^{-1})}{\partial y^j}\Big|_{\psi(f(a))}$, so ist die darstellende Matrix des pushforward die Jacobimatrix $J(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(a))$.

Beweis

Übungsaufgabe.

§3 Eingebettete Untermannigfaltigkeiten

Definition

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeit, $Y \subseteq X$ Teilmenge und $a \in Y$, dann heißt Y glatt in a, wenn eine Karte $U \subseteq Y$ mit $a \in U$ und $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, s.d.

$$\varphi(Y \cap U) = \{x \in V \mid x^{m+1} = ... = x^n = 0\}.$$

Man nennt $m = \dim_a Y$ die Dimension von Y in a.
Man bezeichnet mit

$$\operatorname{codim}_a Y := \dim_a X - \dim_a Y$$

die Kodimension von Y in a.
Setze $U_0 := Y \cap U$ offen in Y (Teilraumtopologie) und $V_0 := \{y \in \mathbb{R}^m \mid (y, 0) \in V\} = \mathbb{R}^m \cap V = \varphi(Y \cap U)$, damit ist $\varphi_0 : U_0 \to V_0$ ein Homöomorphismus.

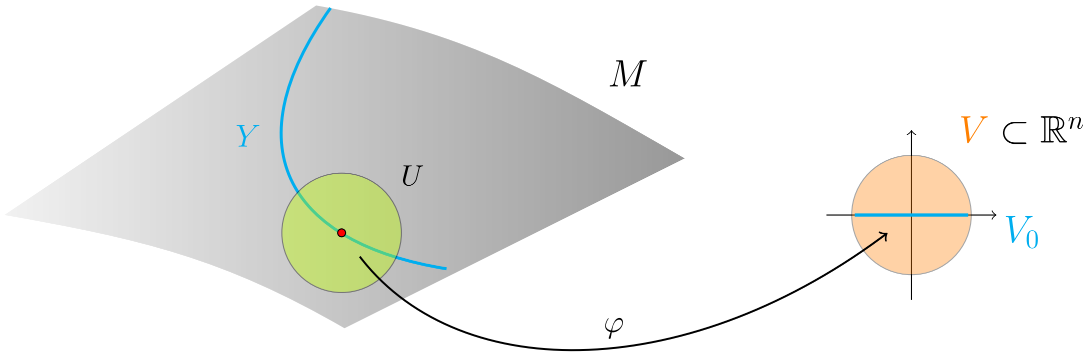


Illustration of an embedded submanifold

Annahme

Ist Y glatt in jedem $a \in Y$, dann ist die Menge der für alle Punkte definierten φ_0 ein glatter Atlas auf Y.

Beweis

z.z.: $\psi_0 \circ \varphi_0^{-1}(x^1, ..., x^m)$ ist glatt

$\psi_0(\varphi^{-1}(x^1, .., x^m, 0, ..., 0) = pr_{\mathbb{R}^m}(\psi(\varphi^{-1}(x^1, ..., x^m, 0, ..., 0)))$
$pr_{\mathbb{R}^m} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ ist glatt und wird nur an den "wichtigen" Punkten $(x^1, ..., x^m, 0, ..., 0)$ ausgewertet. $\square$

Man nennt $(Y, \mathcal{A}_0)$ eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit von $(X, \mathcal{A})$.

3.1 Lemma (Satz über implizite Funktionen für Mannigfaltigkeiten)

Seien $f : X \to Y \in C^\infty$ und $b \in Y$, s.d. $T_a f : T_a X \to T_b Y$ surjektiv für alle $a \in f^{-1}(b) =: S$ ist, dann ist S eine Untermannigfaltigkeit von X.

Beweis

Mittels Satz über implizite Funktionen. OBdA sei $Y = V \subseteq \mathbb{R}^m$, sonst wähle eine Karte (also einen Diffeomorphismus!) $\psi : U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $b \in U_\psi$. Analog darf angenommen werden, dass X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Denn für eine Karte $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U_\varphi$ gilt:
Ist $\varphi(S \cap U_\varphi)$ glatt mit "bügelnder Karte" β, so ist auch für jede beliebige andere Karte

$$\rho : U_\rho \to V_\rho$$

die Menge $\rho(S \cap U_\varphi \cap U_\rho)$ glatt und die "bügelnde Karte" ist dann $\beta \circ \varphi \circ \rho^{-1}$.
Der Beweis wird durch Anwendung des folgenden Faktums auf die Jacobimatrix abgeschlossen:
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat den Rang m genau dann, wenn A surjektiv ist. $\square$

Beispiel

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - 1$$
$$\Rightarrow S = S^{n-1} = f^{-1}(0)$$

§4 Vektorfeld

4.1 Definition

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit, dann heißt die Menge

$$\{(p, v) \mid p \in X, v \in T_p X\}$$

das Tangentialbündel zur Mannigfaltigkeit X und wird mit TX bezeichnet.

Bemerkung

Es wird später gezeigt, dass TX selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist (vgl. S. 36).

4.2 Definition

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und TX ihr Tangentialbündel, dann heißt die Abbildung

$$\mathfrak{X} : X \to TX$$

Vektorfeld, falls zusätzlich

$$pr_1 \circ \mathfrak{X} = \mathrm{id}_M$$

gilt. Man bezeichnet den Raum der Vektorfelder mit $\Gamma_{\mathrm{Abb}}(TX)$, angelehnt an die spätere Bezeichnung $\Gamma(TX)$ für den Raum der glatten Vektorfelder.

Definition

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq X$ offen, $\mathfrak{X}$ ein Vektorfeld auf X und $f \in C^\infty(U)$, dann definiert man

$$\mathfrak{X}_U(f) : U \to \mathbb{R}, a \mapsto \mathfrak{X}_a(f).$$

$\mathfrak{X}$ heißt glatt, wenn für alle $U \subseteq X$ offen und $f \in C^\infty(U)$ die induzierte Funktion

$$\mathfrak{X}_U(f)$$

glatt ist.
D.h. insbesondere induziert $\mathfrak{X}$ eine Abbildung $\mathfrak{X}_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$.
Die Menge der glatten Vektorfelder auf X wird mit $\mathcal{T}(X)$ oder $\Gamma(TX)$ bezeichnet.

Definition

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit, eine Familie $(D_U)_{U\subseteq X}$, $U \subseteq X$ offen, von Abbildungen heißt Freitag-Derivation, falls

(i) $D_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ und ist $\mathbb{R}$-linear

(ii) $(D_U f)\big|_V = D_V(f\big|_V)$ mit $V \subseteq U$ und $f \in C^\infty(U)$

(iii) $D_U(fg) = D_U(g)f + D_U(f)g$

Lemma

Man kann Freitag-Derivationen mit glatten Vektorfeldern identifizieren.

Beweis

1. "$\Leftarrow$"
   Folgt direkt aus der Definition.
2. "$\Rightarrow$"
   Seien $(D_U)_U$ eine Familie von Derivationen und $a \in X$ gegeben, dann definiere $(A_U)_{U\ni a} = A \in T_aX$ durch

   $$A_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \to \mathbb{R}, f \mapsto D_U(f) \mapsto D_U(f)(a).$$

   Das Vektorfeld $\mathfrak{X}$ ist glatt, denn $\mathfrak{X}_a(f) := D(f)(a)$ ist glatt in der Variablen a.

$\square$

Lemma

Sei $\mathfrak{X} : X \to TX$ ein Vektorfeld, also $pr_1 \circ \mathfrak{X} = \mathrm{id}_X$, dann ist $\mathfrak{X}$ ein glattes Vektorfeld genau dann, wenn $\mathfrak{X}$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten ist.

Einschub Patching & Tangentialbündel

(i) Sei $X = \bigcup_i U_i$ und $g_i \in C^\infty(U_i)$, s.d.

$$g_i\big|_{U_i\cap U_j} = g_j\big|_{U_i\cap U_j}.$$

Damit ist g wohldefiniert durch $g\big|_{U_i} = g_i$

(ii) Seien X eine Mannigfaltigkeit mit Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$ und g_i wie in (i). Definiere $f_i : \varphi(U_i) = V_i \to \mathbb{R}$, also Abbildungen mit $f_i = g_i \circ \varphi_i^{-1} \Leftrightarrow g_i = f_i \circ \varphi_i$. Durch

$f_i \circ \varphi_i\big|_{U_i \cap U_j} = g_i\big|_{U_i \cap U_j} = g_j\big|_{U_i \cap U_j} = f_j \circ \varphi_j\big|_{U_i \cap U_j} \Leftrightarrow f_i = f_j \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ist f wohldefiniert durch $f\big|_{U_i} = g_i = f_i \circ \varphi_i$

(iii) manifold construction lemma

Eine Menge M mit den folgenden Eigenschaften trägt die Struktur einer (glatten) Mannigfaltigkeit,

(a) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$,

(b) eine abzählbare Teilemnge $J \subseteq I$ " überdeckt" M, i.e. $\bigcup_{i \in J} U_i$,

(c) es gibt Bijektionen $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$,

(d) ferner gilt $\varphi_i(U_i \cap U_j) \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ für alle $i, j \in I$,

(e) falls $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist, ist die Abbildung $\tau_{j \to i} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_i(U_i \cap U_j)$ glatt,

(f) für zwei verschiedene Punkte existieren entweder zwei disjunkte Teilmengen, die jeweils einen der Punkte enthalten, oder eine Menge, die beide Punkte enthält.

(iv) Sei $\varphi : U \to V$ Karte auf M, die Koordinaten in V seien $(x^1, ..., x^n)$, dann ist

$$T_p(U) = \bigoplus_{i=1}^{n} \frac{\partial(\cdot \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$$

für $p \in U$. Das Tangentialbündel von U ist dann

$$TU = \left\{ (v, p) \mid p \in U, T_pU = T_pM \ni v = \sum v^i \frac{\partial(\cdot \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)} \right\}.$$

Deshalb ist

$$TU \to V \times \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto (\varphi(p), v^1, ..., v^n)$$

eine Bijektion.

Damit folgt aus dem smooth manifold construction lemma, dass TM eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

(v) Ist M eine Gruppe, so ist $TM = M \times \mathbb{R}^n$ mit $\dim M = n$ (z.B. $SO(n)$, $\mathbb{R}^n$, S^1). Hierbei ist dann $\Gamma(TM) = \mathcal{T}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ und jedes M-invariante Vektorfeld ist durch seinen Tangentialvektor im neutralen Element eindeutig bestimmt. Für $M = \mathbb{R}^n$ ergibt sich $TM = \mathbb{R}^{2n}$, $\Gamma(TM) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Vektorfelder $\Gamma(TM)^M$ entsprechen $T_0M = \mathbb{R}^n$.

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{X} : X \to TX$ ein glattes Vektorfeld, $\varphi : U \to V$ eine Karte auf X, dann ist $\varphi_* \mathfrak{X}$ glatt auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\varphi_* \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\varphi = \sum_{i=1}^n \mathfrak{X}_\varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{X}_\varphi^i (x^1, ..., x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$$

Sei $\psi : U_\psi \to V_\psi$, dann ist

$$\psi_* \mathfrak{X} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{X}_\psi^j (y^1, ..., y^n) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_y.$$

Betrachte nun den Diffeomorphismus $\tau = \psi \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \to V_\psi$, dann ist

$$\tau_*(\varphi_* \mathfrak{X}) = T_a \tau(\varphi_* \mathfrak{X}) = \psi_* \mathfrak{X}.$$

In Koordinaten bedeutet das

$$J(\tau, x) \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_\varphi^1(x) \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_\varphi^n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_\psi^1(\tau(x)) \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_\psi^n(\tau(x)) \end{pmatrix}$$

und für einen Index

$$\mathfrak{X}_\psi^i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau^i(x)}{\partial x^j}(x) \mathfrak{X}_\varphi^j \text{ für } y = \tau(x).$$

Lemma

Sei $X = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi$ eine glatte Mannigfaltigkeit und hat man glatte "Vektoren" $\mathfrak{X}_\varphi^i, ..., \mathfrak{X}_\varphi^n$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ wie oben, so erhält man durch patching ein glattes Vektorfeld $\mathfrak{X}$ auf X. Dabei ist $\mathfrak{X}$ wohldefiniert durch

$$\varphi_* \mathfrak{X} = \sum_{i=1}^n \mathfrak{X}_\varphi^i \frac{\partial (\cdot \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}.$$

Lemma

Damit hat man 4 äquivalente Definitionen für (glatte) Vektorfelder:

(i) $\mathfrak{X}_U(f)$ ist glatt

(ii) Freitag-Derivationen $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$

(iii) glatte Abbildung $X \to TX$

(iv) Koordinatenpatching

Beweis

$1 \Leftrightarrow 2$
siehe Lemma S. 35

$3 \Leftrightarrow 4$
Folgt aus der Tatsache, dass Funktionen glatt sind genau dann, wenn die Koordinaten bzgl. Karten glatt sind

$1 \Rightarrow 3/4$
Wähle U als Definitionsbereich einer Karte und betrachte dann $\mathfrak{X}$ auf $\varphi(U) = V$. Betrachte hier nun $f(x^1, ..., x^n) = x^i$ die Projektion $\Rightarrow \varphi_* \mathfrak{X}_V(f) = \sum_{j=1}^n \mathfrak{X}^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{X}^j \delta_j^i = \mathfrak{X}^j$.

$3/4 \Rightarrow 1$
Glattheit ist eine lokale Eigenschaft und wird von Diffeomorphismen erhalten, also betrachtet man nur glatte Komponenten in V.

□

§5 Differentiale

Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, dann ist

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{L : V \to W \mid L \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$$

und für $W = \mathbb{R}$ heißt

$$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) =: V^*$$

Dualraum von V. Die Elemente in V^* heißen Kovektoren.
Für V^* konstruiert man auf folgende Weise eine Basis:
Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von V, dann definiert man

$$e^{*j} : V \to \mathbb{R}, v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \mapsto v^j.$$

Es gilt offensichtlich, dass $e^{*i} = pr_i \in V^*$ die i-ten Projektionen sind. Diese bilden eine Basis von V^*, denn für eine Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{*j} = 0 \in V^*$$

gilt nach Auswertung an den Basisvektoren e_i von V

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{e^{*j}(e_i)}_{=\delta_i^j} = 0.$$

Damit ist auch klar, dass $\dim V = \dim V^*$.

Die Dreckingen Tricks der Physiker

Ko- & kontravariante Vektoren

Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume, $L : V \to W$ linear und $\omega : W \to \mathbb{R}$ linear, dann ist $\omega \circ L \in V^*$. Auf diese Weise induziert L eine Abbildung

$$L^* : W^* \to V^*, \omega \mapsto \omega \circ L$$

Sei A die darstellende Matrix von L bzgl. irgendwelcher Basen. Schreibe $\omega \in W^*$ als Zeilenvektor $(\omega_1, ..., \omega_n)$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$.

Also gilt

$$\omega(x) = (\omega_1, ..., \omega_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x^i$$

und

$$\omega(L(x)) = (\omega_1, ..., \omega_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt

$$\omega \circ L = \omega \cdot A =: \eta^t$$

und explizit für den Spaltenvektor η

$$\eta = (\omega A)^t = A^t \omega^t = A^t \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ omega_n \end{pmatrix}.$$

Ist L ein Isomorphismus, dann gilt

$$\begin{matrix} L : V \to W, & (L^{-1})^* = (L^*)^{-1} : V^* \to W^* \\ L^* : W^* \to V^*, & L^{-1} : W \to V \end{matrix}.$$

Für eine "Größe" f unterscheidet man mittels Transformation $W = V$ ob $f \in V$ oder $f \in V^*$ liegt.

Ist A die Darstellungsmatrix für den Basiswechsel $L : B \to \tilde{B}$, $f = (f_1, ..., f_n)$ in Koordinatendarstellung bzgl. B und $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n)$ in Koordinatendarstellung bzgl. $\tilde{B}$ gegeben, dann gilt:

$$\tilde{f} = Af \;\Rightarrow\; f \in V$$

$$\tilde{f} = fA^{-1} \;\Rightarrow\; f \in V^*,$$

denn A ist die darstellende Matrix von L und diese entspricht $(b_1, ..., b_n)^{-1}$ (b_i die Basisvektoren).

Kovektoren heißen dementsprechend kovariant (transformieren "mit" der Basis) und ha-

ben Indizes unten, Vektoren in V heißen kontravariant (transformieren "entgegen" der Basis, "mit"der Basis $^{-1}$) und haben Indizes oben.
Vektorfelder sind z.B. kontravariante Tensoren, da sie nach $V = T_aX$ abbilden, aber Differentiale sind kovariante Tensoren, da sie nach $V^* = T_a^*X$ abbilden. Dabei sind Tensoren Abbildungen

$$X \to \underbrace{T_aX \otimes ... \otimes T_aX}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_a^*X \otimes ... \otimes T_a^*X}_{q\text{-mal}}, a \mapsto \omega_a.$$

ω heißt in diesem Fall vom Typ (p, q), z.B. sind Vektorfelder vom Typ $(1, 0)$, Differentiale vom Typ $(0, 1)$ und Metriken vom Typ $(0, 2)$.

Einstein'sche Summenkonvention

Taucht ein Index i beim Summieren einmal unten und einmal oben auf, so wird höchst wahrscheinlich über i summiert und das Summenzeichen kann weggelassen werden, z.B.

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Nota bene: In Gleichungen gilt

$$\# \; i \text{ oben links - } \# \; i \text{ unten links} = \# \; i \text{ oben rechts -} \# \; i \text{ unten rechts},$$

z.B. für $f : U \to V$ gilt für den pushforward

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

und dort für $i : 0 - 0 = 1 - 1$ und für $j : 0 - 1 = 0 - 1$.

5.1 Definition

Analog zu TX definiert man $T^*X = \{(p, w) \mid w \in (T_pX)^*\}$ und damit heißt eine Abbildung

$$\omega : X \to T^*X$$

für die zusätzlich gilt

$$\mathrm{id}_X = pr_X \circ \omega$$

Kovektorfeld oder Differential. Man verwendet wieder die Notation $\Gamma_{\mathrm{Abb}}(T^*X)$ für den Raum der Differentiale.

5.2 Definition

Sei $a \in X = U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann bildet $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_a\right\}_{1\leq i\leq n}$ eine Basis von T_aX und man bezeichnet die Elemente der dualen Basis mit dx_a^i. Damit gilt für Differentiale auf U

$$\omega = \sum_i^n \omega_i dx^i = \omega_i dx^i$$

und im Speziellen

$$\omega_a = \omega_{i,a} dx_a^i \in (T_aX)^* = T_a^*X.$$

Analog zum pushforward $T_af : T_aX \to T_{f(a)}Y$ definiert man den pullback entlang f

$$(T_af)^* : T_{f(a)}^*Y \to T_a^*X,$$

als dessen duale Abbildung. Alternative Notationen sind $(T_af)^* = T_a^*f = f^*$ und es gilt

$$T_af^*(\omega) = \omega \circ T_af \text{ für } \omega \in T_{f(a)}Y.$$

Für ein Differeantial ω auf Y definiert man das Differential $T^*f\omega = f^*\omega$ auf X mittels

$$(f^*\omega)_a = \omega_a \circ T_af = T_a^*f(\omega_a).$$

5.3 Satz

Der pullback f^* entlang f hat folgende Eigenschaften

(i) Für $g : Y \to Z$ und $\eta \in T_{g\circ f(a)}Z$ gilt

$$(g \circ f)^*(\eta) = f^*(g^*\eta).$$

(ii) Für die kanonische Inklusion $\iota : U \to X$ ist ι^* gerade die Einschränkungsabbildung $T_a\iota$.

(iii) Sei $f : U \to V$ glatt, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ beide offen, dann ist

$$T_a U \ni (\eta_1, ..., \eta_n) = (\omega_1, ..., \omega_m) J(f, a) = f^*(\omega).$$

Es gilt

$$f^*(dy^i) = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} dx^j.$$

(iv) f^* ist C^∞-linear, d.h. es ist $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$ und ist h eine glatte Abbildung, dann ist $f^*(h\omega) = h \circ f \cdot f^*\omega$, also gilt in jedem Punkt $a \in X$:

$$(f^*(h\omega))_a(\mathfrak{X}_a) = h(f(a)) \cdot \omega_{f(a)}(\mathfrak{X}_a(\cdot \circ f)).$$

Beweis

Übungsaufgabe.

Bemerkung

Seien X, Y glatte Mannigfaltigkeiten, $a \in X$ und $f : X \to Y$ ein Diffeomorphismus , dann sind $T_a^* f$ und $T_{f(a)}^* f^{-1}$ Isomorphismen. Für eine Karte (φ, U_φ) ist $\omega\big|_{U_\varphi}$ wohldefiniert und man erhält

$$\omega \sim> \omega\big|_{U_\varphi} \sim> (\varphi^{-1})^* \omega\big|_{U_\varphi} = \sum_{i=1}^n \omega_i^\varphi dx^i \in \Gamma_{\text{Abb}}(T^* V_\varphi).$$

Seien (ψ, U_ψ) eine weitere Karte mit $(\psi^{-1})^* \omega\big|_{U_\psi} = \omega_j^\psi dy^j$ und τ die Kartenwechselabbildung zwischen φ und ψ, dann gilt

$$\omega_i^\varphi(x) = (\tau^* \omega^\psi)_{i,x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}(x) \omega_j^\psi(\tau(x)) \quad \forall\, x \in U_\varphi \cap U_\psi \quad (*)$$

oder äquivalent

$$(\omega_1^\varphi, ..., \omega_n^\varphi) = (\omega_1^\psi, ..., \omega_n^\psi) \cdot J(\tau).$$

Hat man für jede Karte (ρ, U_ρ) ein n-Tupel $(\omega_1^\rho, ..., \omega_n^\rho)$, s.d. jeweils $(*)$ gilt, so erhält man durch patching ein Differential auf X.

Definition

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Kurve $\gamma : I \to X$, definiert man

$$\dot{\gamma}(t) = T_t\gamma\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=t}\right) = T_t\gamma(1).$$

Sei ω ein Differential auf X, dann ist

$$\int_\gamma \omega := \int_I \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))dt.$$

5.4 Bemerkung

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeiten und $\gamma : I \to X$ eine glatte Kurve, dann gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_I \omega_i^\varphi(\gamma(t))\dot{\gamma}^i{}_{varphi}(t),$$

für die lokalen Koordinaten ω_i^φ und $(\dot{\gamma})_\varphi^i$ bzgl. irgendeiner Karte $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ mit $\gamma(I) \subseteq U_\varphi$. Diese Definition ist unabhängig von der Kartenwahl.
Seien ferner Y eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $f : X \to Y$ glatt, dann gilt

$$\int_{f\circ\gamma} \omega = \int_\gamma f^*\omega,$$

falls die Integrale existieren.

Beweis

Übungsaufgabe.

Definition

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit, ω ein Differential auf X und $\mathfrak{X} \in \mathcal{T}(U)$ ein Vektorfeld, dann definiert man

$$\omega\big|_U(\mathfrak{X}) : U \to \mathbb{R}, a \mapsto \omega_a(\mathfrak{X}_a).$$

5.5 Definition / Hilfssatz

Ein Differential ω auf einer glatten Mannigfaltigkeit X heißt glatt, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingugnen erfüllt ist

(i) $\forall U \in X$, $\forall \mathfrak{X} \in \mathcal{T}(U)$ gilt $\omega\big|_U(\mathfrak{X}) \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.
(ii) Die Tupel $(\omega_1^\varphi, ..., \omega_n^\varphi)$ sind für beliebige Karten glatt.
(iii) $\omega : X \to TX$ ist glatt als Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

Der Raum der glatten Differentiale wird mit $\mathcal{T}^*(X)$ oder $\Gamma(T^*X)$ bezeichnet.

Beweis

Übungsaufgabe.

5.6 Definition / Hilfssatz

Seien X ein glatte Mannigfaltigkeit und $(\omega_U)_U$, $U \subseteq X$ offen, eine Familie von Abbildungen

$$\omega_U : \mathcal{T}(U) \to C^\infty(U),$$

s.d.

(i) ω_U ist $C^\infty(U)$-linear, d.h. für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathcal{T}(U)$ und $f, g \in C^\infty(U)$ gilt

$$\omega_U(f \cdot \mathfrak{X} + g \cdot \mathfrak{Y}) = f \cdot \omega_U(\mathfrak{X}) + g \cdot \omega_U(\mathfrak{Y}).$$

(ii) ω_U ist verträglich mit Restriktionen, d.h. für $\mathfrak{X} \in \mathcal{T}(U)$ und $V \subseteq U$ offen gilt

$$\omega_U(\mathfrak{X})\big|_V = \omega_V(\mathfrak{X}\big|_V).$$

Dann definiert ω_U ein Differential auf X.

Beweis

Übungsaufgabe.

§6 Multilineare Algebra

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlich dimensional über einem Körper K, also insbesondere $\dim V = \dim V^* \Leftrightarrow V \cong V^*$.

Bemerkung

$\varphi : V \xrightarrow{\sim} V^*$ ist nicht ohne zusätziche Struktur anzugeben, z.B. durch Basen ($e_i \mapsto e^{i*}$) oder ein Skalarprodukt ($v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$), also nicht kanonisch.

6.1 Lemma

Im Gegensatz dazu ist

$$\sigma : V \to (V^*)^* = V^{**}, v \mapsto \Phi_v$$

mit

$$\Phi_v : V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

ein kanonischer Isomorphismus.

Definition

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ein R-Modul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer skalaren Multiplikation

$$R \times M \to M, (r, m) \mapsto r \cdot m,$$

s.d. für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$ gilt

$$r \cdot (r' \cdot m) = (r \cdot r') \cdot m$$

$$(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$$

$$r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$$

$$1 \cdot m = m$$

Definition

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $M_1, ..., M_n, N$ R-Moduln, dann heißt eine Abbildung $L : M_1 \times ... \times M_n \to N$ multilinear, falls

$$L(\lambda^{i_1} m_{i_1}, ..., \lambda^{i_n} m_{i_n}) = (\lambda^{i_1} \cdots \lambda^{i_n}) \cdot L(m_{i_1}, ..., m_{i_n})$$

in der Einstein'schen Summenkonvention gilt.
Es liegt also Linearität in jedem Argument vor.
Die Menge aller solcher Abbildungen ist ein R-Modul und wird mit

$$\mathrm{Mult}(M_1 \times \cdots \times M_n, N)$$

bezeichnet.

Beispiel

Die Determinante

$$\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}, A = (a_i)_j \mapsto \det A$$

ist eine Multilinearform auf den Zeilen oder Spalten.

Definition

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $M_1, ..., M_n$ R-Moduln.
Ein Paar $(M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n, \mathrm{ten})$ bestehend aus einem R-Modul und einer multilinearen Abbildung

$$\mathrm{ten} : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$$

$$m_1 \times \cdots \times m_n \mapsto m_1 \otimes_R \cdots \otimes_R m_n$$

heißt Tensorprodukt, wenn es folgende universelle Eigenschaft erfüllt:
Für jede multilineare Abbildung $f := M_1 \times \cdots \times M_n \to W$ ist

$$\begin{tikzcd}
 & W \\
M_1 \times \cdots \times M_k \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{ten}"'] & \\
 & M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k \arrow[uu, dashed, "\exists!\, F"']
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit einer lineare Abbildung $F : M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n \to W$. Es ist nocht nicht vollständig geklärt, ob das eben definierte Objekt überhaupt existiert und in diesem Fall eindeutig ist.

Bemerkung

Das Tensorprodukt existiert und ist eindeutig (bis auf Isomorphie).

Beweis

(i) Eindeutigkeit

Sei (T, t) ein weiteres Tensorprodukt, dann gilt

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k \arrow[d, dashed, "\exists!\ s"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "\exists!\ \mathrm{id}_{M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k}"] \\
M_1 \times \cdots \times M_k \arrow[ur, "\mathrm{ten}"] \arrow[r, "t"'] \arrow[dr, "\mathrm{ten}"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\ \mathrm{Ten}"] \\
 & M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, dashed, "\exists!\ \mathrm{Ten}"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "\exists!\ \mathrm{id}_T"] \\
M_1 \times \cdots \times M_k \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "\mathrm{ten}"'] \arrow[dr, "t"'] & M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k \arrow[d, dashed, "\exists!\ s"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Es folgt $s \circ \mathrm{Ten} = \mathrm{id}_{M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n}$ und $\mathrm{Ten} \circ s = \mathrm{id}_T$. Ten, s sind R-Modulisomorphismen, d.h. $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n \cong T$

(ii) Existenz

Zu $M_1, ..., M_n$ definiere man den formale $\mathbb{Z}$-Modul M, der von

$$\{(m_1, ..., m_n) \mid m_i \in Mi, i = 1, .., n\}$$

erzeugt wird. Sei $N \subseteq M$ der von

$m_1 \times \cdots \times (\lambda m_i) \times \cdots \times m_n - (\lambda m_1) \times \cdots \times m_i \times \cdots \times m_n$, $\lambda \in R$

$m_1 \times \cdots \times (m_i + n) \times \cdots \times m_n - m_1 \times \cdots \times m_i \times \cdots \times m_n - m_1 \times \cdots \times n \times \cdots \times m_n$

erzeugte Untermodul, dann ist die Abbildung

$$M_1 \times \cdots \times M_n \to {}^{M}\!/_{N}, (m_i) \mapsto (m_i) \mod N$$

multilinear und ${}^{M}\!/_{N} =: M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$.

$\square$

Lemma

Ist $R = K$ ($\mathrm{char}(K) = 0$), $M_i = V_i$ Vektorräume, dann ist

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := \mathrm{Mult}(V_1^*, ..., V_n^*, K)$$

und

$$\mathrm{ten} : \prod_{i=1}^n V_i \to \bigotimes_{i=1}^n V_i$$

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto a_1 \otimes_K \cdots \otimes_K a_n := \left\{ \prod_{i=1}^n V_i^* \to K, (\varphi_1, ..., \varphi_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \varphi_i(a_i) \right\}.$$

Die $e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^n$ bilden eine Basis von $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

Für $n = 1$ gilt dann insbesondere

$$\bigotimes_{i=1}^1 V_i = \mathrm{Mult}(V_1^*, K) = V_1^{**}$$

mit

$$\mathrm{ten} = \sigma : V_1 \to V_1^{**}$$

dem kanonische Isomorphismus von Seite 46.

Beweis

$(\mathrm{Mult}(V_1^*, ..., V_1^*), \mathrm{ten})$ erfüllt die universelle Eigenschaft, denn für eine multilineare Abbidlung

$$f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$$

gilt

$$f(v_1, ..., v_n) = f(v_1^{i_1} e_{i_1}^1, ..., v_n^{i_n} e_{i_n}^n) = v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} f(e_{i_1}^1, ..., e_{i_n}^n).$$

Aber $e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^1_{i_n}$ operiert auf $V_1^* \times \cdots \times V_n^*$ mittels

$$(\varphi^1, ..., \varphi^n) \mapsto \prod_{j=1}^n e^j_{i_j}(\varphi^j) = \prod_{j=1}^n \varphi^j_{i_j},$$

also gilt

$$g(\varphi^1, ..., \varphi^n) = e_{i_1}1 \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n}(\varphi_1, ..., \varphi_n) \cdot g^{i_1,...,i_n},$$

wobei $g^{i_1,...,i_n} = g(e_1^{*i_1}, ..., e_n^{*i_n})$ Vektoren in K sind.
Analog zu oben gilt für multilineare Abbildungen

$$g : V_1^* \times \cdots \times V_n^* \to K$$

$$g(\varphi^1, ..., \varphi^n) = \varphi^1_{j_1} \cdots \varphi^n_{j_n} \cdot g(e^{*j_1})_1, ..., e_n^{*j_n}.$$

Definiere also

$$F : \bigotimes_{i=1}^n V_i \to W$$

mittels

$$e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n} \mapsto f(e^1_{i_1}, ..., e^n_{i_n}.$$

F erfüllt also nach Konstruktion die universelle Eigenschaft, denn

$$\begin{aligned} f(v_1, ..., v_n) &= v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} f(e^1_{i_1}, ..., e^n_{i_n}) \\ &= v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} F(e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n}) \\ &= F(v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n}) \\ &= F(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n). \end{aligned}$$

Die $e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^n_{i_n}$ bilden also ein Erzeugendensystem von $\bigotimes_{i=1}^n V_i$, ferner sind die sie sogar linear unabhängig. Denn betrachtet man eine beliebige Linearkombination

$$\sum_{i=1}^n \lambda^{i_1,...,i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} = 0,$$

und wertet diese in den Kovektoren $e^{*j_1}, ..., e^{*j_n}$ aus, erhält man

$$0 = \lambda^{i_1,...,i_n} \delta^{j_1}_{i_1} \cdots \delta^{j_n}_{i_n} = \lambda^{i_1,...,i_n}.$$

□

Aus obigem Lemma folgt zudem:

$$\dim(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n) = \prod_{i=1}^{n} \dim V_i,$$

Achtung es gilt aber:

$$\dim(V_1 \times \cdots \times V_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i.$$

Beispiel

Seien $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$, dann ist $v \otimes w$ eine $n \times m$-Matrix

$$v = (a_1, ..., a_n), w = (b_1, ..., b_n) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1, ..., b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

vom Rang 1.

Lemma

Für die Dimension des Raums der multilinearen Abbildungen $M(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$ gilt

$$\dim(\mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)) = \prod_{i=1}^{n} \dim V_i \cdot \dim W.$$

Beweis

Es ist $W \cong K^m$ mit $\dim W = m$, woraus folgt
$\mathrm{Mult}(V_1 \times ... \times V_n, W) \cong \mathrm{Mult}(V_1, ..., V_n, K)^m \cong \mathrm{Mult}(V_1^*, ..., V_n^*)^m$

□

6.2 Bemerkung

Seien $L_i : V_i \to W_i$ lineare Abbildungen, dann heißt die Eigenschaft

$$V_1 \otimes_K ... \otimes_K V_n \to W_1 \otimes_K ... \otimes_K W_n$$

$$v_1 \otimes_K ... \otimes_K v_n \mapsto L_1(v_1) \otimes_K ... \otimes_K L_n(v_n)$$

Funktoralität von $\otimes$ und ist durch die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & W_1 \times \cdots \times W_n \arrow[d, "\mathrm{ten}_W"] \\
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "{(L_1, ..., L_n)}"] \arrow[r, dashed, "\text{mult.}"'] \arrow[dr, "\mathrm{ten}_V"'] & W_1 \otimes_K \cdots \otimes_K W_n \\
 & V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \arrow[u, dashed, "\exists! L_1 \otimes \cdots \otimes L_n"']
\end{tikzcd}$$

Analog Können die beiden folgenden Sätze bewiesen werden:

6.3 Satz

Das Tensorprodukt ist assoziativ, d.h.

$$(V_1 \otimes_K ... \otimes_K V_i) \otimes_K (V_{i+1} \otimes_K ... \otimes_K V_n) \cong V_1 \otimes_K ... \otimes_K V_n.$$

6.4 Satz

Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation, dann ist

$$V_1 \otimes_K ... \otimes_K V_n \cong V_{\sigma(1)} \otimes_K ... \otimes_K V_{\sigma(n)}.$$

6.5 Bemerkung

Sei $\tau \in S_n$, dann heißt τ eine Transposition, falls τ genau zwei Elemente vertauscht, die restlichen aber festlässt. Sei $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation, dann lässt sich σ als Produkt von Transpositionen darstellen (da S_n von den Transpositionen erzeugt). Betrachte die Abbildung

$$\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}.$$

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus und durch die Angabe auf einem Erzeugendensystem festgelegt. Setzt man also $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ für alle Transpositionen $\tau \in S_n$ ist sgn wohldefiniert.
Seien nun $\sigma \in S_n$ und X eine Menge, dann ist

$$X^n = \underbrace{X \times ... \times X}_{n\text{-mal}} \to X^n, (x^1, ..., x^n) \mapsto \left(x^{\sigma^{-1}(1)}, ..., x^{\sigma^{-1}(n)}\right) =: x^\sigma$$

und es gilt

$$x^{\sigma\rho} = \left(x^{(\sigma\rho)^{-1}(i)}\right)_i = \left(x^{\rho^{-1}\ sigma^{-1}(i)}\right)_i = (x^\sigma)^\rho.$$

Definition

Eine multilineare Abbildung $L \in \mathrm{Mult}(M \times ... \times M, N)$ heißt alternierend, falls

$$L^\sigma(v) := L(v^\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)L(v) \quad \forall\, \sigma \in S_n,\ \forall\, v \in M^n.$$

Die Menge aller alternierenden Abbildungen wird mit $\mathrm{Alt}(M^n, N)$ bezeichnet. Im Spezialfall schreibt man $\mathrm{Alt}(M^n, R) = \mathrm{Alt}^n(M)$.

Lemma

Für eine multilineare Abbildung L gilt

$$L \text{ ist alternierend } \Leftrightarrow\ L(..., v^i, ..., v^j, ...) = -L(...., v^j, ..., v^i, ...).$$

(also falls $L(v) = -L(v^{\tau_{ij}})$ für alle Transpositionen $\tau_{ij} \in S_n$), denn

$$\underbrace{\mathrm{sgn}(\tau)}_{=-1} L(v^{\tau_{ij}}) = L(v)\ \Leftrightarrow\ L(v^{\tau_{ij}}) = \mathrm{sgn}(\tau_{ij})L(v).$$

Beispiel

(i) Die Determinante ist multilinear und es gilt $\det A = -\det \tilde{A}$, wenn $\tilde{A}$ durch Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten) entsteht.

(ii) Betrachte die multilineare Abbildung

$$L : (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto v \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\hat{L}} w^t.$$

Für diese gilt

$$L(v, w) = (v^1, v^2) \begin{pmatrix} w^2 \\ -w^1 \end{pmatrix} = v^1 w^2 - v^2 w^1 = -L(w, v).$$

Für die Darstellungsmatrix ergibt sich $\hat{L} = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$. Diese ist die "einzige" alternierende Abbildung auf $(\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^*$, also $\mathrm{Alt}^2\left((\mathbb{R}^2)^*\right) \cong \mathbb{R} \cdot L$

Definition

Sei $p > 0$, dann definiert man

$$(\cdot)^{\text{alt}} : \text{Mult}(V^p, \mathbb{R}) \to \text{Alt}(V^p, \mathbb{R}), \quad T \mapsto T^{\text{alt}} := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) T(x^\sigma).$$

Lemma

Sei $T \in \text{Mult}(V^p, \mathbb{R})$, dann gilt

$$T = T^{\text{alt}} \;\Leftrightarrow\; T \in \text{Alt}(V^p, \mathbb{R}).$$

Beweis

“$\Leftarrow$“
$T^{\text{alt}} = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} T = T$
“$\Rightarrow$“
$T^\rho = (T^{\text{alt}})^\rho = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) T^{\sigma\rho} = \text{sgn}(\rho^{-1}) \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma\rho) T^{\sigma\rho} = \text{sgn}(\rho^{-1}) T^{\text{alt}} = \text{sgn}(\rho^{-1}) T$

□

Beispiel

Die Alternierende Abbildung L mit Darstellungsmatrix $\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ aus dem vorherigen Beispiel lässt sich darstellen, als

$$\hat{L} = (e_1 \otimes e_2)^{\text{alt}}.$$

6.6 Definition

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p \in \mathbb{Z}$, dann definiert man für $p \geq 1$

$$\Lambda^p V := V^{[p]} := \text{Alt}(V^* \times \ldots \times V^*, \mathbb{R}).$$

Man setzt für p< 0

$$\Lambda^p V := 0$$

und

$$\Lambda^0 V := \mathbb{R} = V^{\otimes 0}.$$

Die Räume $\Lambda^p V$ heißen p-te äußere Potenz.

Bemerkung

(i) $\Lambda^p V \subseteq V^{\otimes p}$.
(ii) Für $p = 1$ ist $V^{[1]} = V^{\otimes 1} = V^{**} \cong V$.
(iii) Aus $p > \dim V \Rightarrow \Lambda^p V = 0$

Beweis

Übungsaufgabe.

Lemma / Bemerkung

Das Diagramm

$$\Lambda^p V \times \Lambda^q V \hookrightarrow V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \overset{\text{ten}}{\to} V^{\otimes q} \otimes V^{\otimes q} = V^{\otimes (p+q)} \overset{(\cdot)^{\text{alt}}}{\to} \Lambda^{p+q} V$$

inspiriert die folgende Bemerkung:
Das Paar $(\Lambda^p V, \text{alt}^p)$ erfüllt die universelle Eigenschaft, dass für jede alternierende Abbildung $f : V^p \to W$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & W \\
V^p \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\text{alt}^p"'] & \\
 & \Lambda^p V \arrow[uu, dashed, "\exists!\ F"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert mit einer linearen Abbildung

$$F : \Lambda^p V \to W$$

und $\text{alt}^p(v_1, ..., v_p) := v_1 \wedge \cdots \wedge v_n := (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)^{\text{alt}}$, also ist $\text{alt}^p = (\cdot)^{\text{alt}} \circ \text{ten}$.
Analog zum Tensorprodukt stellt man fest

$$f(v_1, ..., v_p) = v_1^{i_1} \cdots v_p^{i_p} \cdot f(e_{i_1}, ..., e_{i_p}).$$

Beweis

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den folgenden Lemmata. □

Lemma

Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von V, dann ist $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}$ mit $1 \leq ... \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq ...n$ eine Basis von $\Lambda^p V$. Diese wird auch mit $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ bezeichnet, dabei ist $I = \{i_1, ..., i_p\}$, $\#I = p \Rightarrow \dim \Lambda^p V = \binom{n}{p}$.

Beweis

$e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$ erzeugt $V^{\otimes p} \Rightarrow (e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p})^{\text{alt}}$ erzeugen $\Lambda^p V$. Durch Auswertung der Linearkombination $\lambda^I e_I = 0$ an der Stelle $(e^{*j_1}, ..., e^{*j_p}) =: e^{*J}$ folgt:
falls $I \neq J$, dann existiert $i \in I$, s.d. $i \neq j_k \; \forall \, k$ (oBdA: $i = i_1$)
$\Rightarrow e_I = (e_i \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p})^{\text{alt}}$
$\Rightarrow e_I(e^{*J}) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)(e_i \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_p})(e^{*\sigma(j_1)}, ..., e^{*\sigma(j_p)}) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} e_i(e^{*\sigma(j_1)}) \prod\limits_k e_{i_k}(e^{*\sigma(j_k)}) = 0$, denn $e_i(e^{*\sigma(j_1)}) = 0$ für alle k gilt: $i \neq \sigma(j_k)$. Dies folgt aus der Vorraussetzung $i \neq j_k$ $\forall \, k$. □

Lemma

Für $a \in \Lambda^p V$, $b \in \Lambda^q V$ gilt

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a.$$

Im Speziellen gilt für $p = q = 1$ und $a = b$ $a \wedge a = 0$.

Beweis

Übungsaufgabe.

6.7 Definition

Seien $p, q \geq 0$, dann heißt die bilineare Abbildung

$$\wedge : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \Lambda^{p+q} V, (T, S) \mapsto T \wedge S := (T \otimes S)^{\text{alt}}.$$

Wegdeprodukt oder Dachprodukt.
Für $p < 0$ (bzw. $q < 0$) gilt $\Lambda^p V = 0 \Rightarrow T = 0$ (bzw. $\Lambda^q V = 0$, $S = 0$).
Für $p = 0$ gilt $T \in \Lambda^0 V = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \Lambda^q V = \Lambda^q V \Rightarrow T \wedge S = T \cdot S$.

6.8 Lemma

Das Wedgeprodukt ist assoziativ, d.h. für $a \in \Lambda^p V$, $b \in \Lambda^q V$ und $c \in \Lambda^r V$ gilt

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Insbesondere ist dadurch $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ wohldefiniert.

Beweis

später?

Bemerkung

Sei $L : V \to W$ lineare Abbildung und $L^{\otimes p} : V^{\otimes p} \to W^{\otimes p}$, dann gilt

$$L^{\otimes p}(\Lambda^p V) \subseteq \Lambda^p W.$$

Beweis

Betrachte die Basis $e_I = (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})^{\text{alt}} = \sum\limits_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_p)}$
$L^{\otimes p}(e_I) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) L^{\otimes p}(e_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_p)}) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) L(e_{\sigma(i_1)}) \otimes \cdots \otimes L(e_{\sigma(i_p)})$
$\overset{L(e_{i_j}) = w_{i_j}}{=} \sum\limits_{sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) w_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(i_p)} = w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p} \in \Lambda^p W.$ □

6.9 Bemerkung

Die Abbildung

$$\Lambda^p L : \Lambda^p V \to \Lambda^p W$$

ist linear. Die Auswertung an e_I ergibt

$$\Lambda^p L(e_I) = \sum_J L_I^J f_J$$

mit $L_I^J = \det\left((\hat{L}_i^j)_{i\in I}^{j\in J} \right)$, $\hat{L}$ die darstellende Matrix von L und $\hat{L}_{i\in I}^{j\in J}$ die Teilmatrix mit Spalten in J und Zeilen in I.
Insbesondere gilt für $p = \dim V$

$$\Lambda^p L = \det(\hat{L}),$$

denn $I = \{1, ..., p\} = J$ und $\hat{L}_I^J$ ist die Darstellungsmatrix von L, $\Lambda^p V \cong \mathbb{R}$.
Ferner gilt

$$(\Lambda^p La) \wedge (\Lambda^q Lb) = \Lambda^{p+q}(a\ wedgeb).$$

Beweis

später?

§7 Alternierende Differentialformen

Definition

Die Menge

$$T^{p,q}X = \{(a,T) \mid a \in X, T \in T_a^{p,q}X = (T_aX)^{\otimes p} \otimes (T_a^*X)^{\otimes q}\}$$

heißt Tensorbündel vom Typ (p,q). Für die Elemente $T \in T_a^{p,q}X$, genannt Tensoren, gilt dabei

$$T = \sum_{\substack{i_k \\ 1 \leq k \leq p,q}} T_{i_1,\dots,i_p}^{i_{p+1},\dots,i_{p+q}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_a \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\Big|_a \otimes dx_a^{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes dx_a^{i_{p+q}}.$$

Eine Karte $\varphi : U \to V$ auf X induziert eine Karte

$$\Phi : T^{p,q}U \to V \times T^{p,q}\mathbb{R}^n = V \times \mathbb{R}^{n^{p+q}}$$

$$(a,T) \mapsto \left(\varphi(a), T_{i_1,\dots,i_p}^{i_{p+1},\dots,i_{p+q}}\right)$$

auf $T^{p,q}X$.

Definition

Ein Tensorfeld vom Typ (p,q) ist eine Abbildung

$$T : X \to T^{p,q}X$$

mit

$$\mathrm{id}_X = pr_X \circ T.$$

Tensorfelder vom Typ $(p,0)$ heißen kontravariant, Tensorfelder vom Typ $(0,q)$ heißen kovariant und werden üblicherweise mit ω bezeichnet.

Beispiel

Vektorfelder sind gerade kontravariante Tensorfelder vom Typ $(1,0)$.
Differentiale sind gerade kovariante Tensorfelder vom Typ $(0,1)$.

Bemerkung

Analog definiert man

$$\Lambda^p T^* X = \{(a, \omega) \mid a \in X, \omega \in \Lambda^p T_a^* X\}$$

wobei eine Karte

$$\varphi : U \to V$$

die Karte

$$\Phi : \Lambda^p T^* U \to V \times \Lambda^p \mathbb{R}^n, (a, \omega) \mapsto (\varphi(a), (\omega_I)_I)$$

induziert. Da $V \times \Lambda^p \mathbb{R}^n \subseteq V \times (\mathbb{R}^n)^{\otimes p}$ ist, ist $\Lambda^p T^* X$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $T^{0,p} X = (T^* X)^{\otimes p}$.

7.1 Definition

Eine alternierende Differentialform vom Grad p (kurz: p-Form) oder alternierender kovarianter Tensor vom Typ $(0, p)$ ist eine Abbildung

$$\omega : X \to \Lambda^p T^* X$$

mit

$$\mathrm{id}_X = pr_X \circ \omega$$

und damit ein kovarianter Tensor vom Typ $(0, p)$.
Insbesondere sind mit dieser Definition Differentiale 1-Formen.

Beispiel

Betrachte den $\mathbb{R}^3$. Seien $\rho\vec{v}$ der Dichtefluss eines Feldes und x und y Tangentialvektoren zu einer Untermannigfaltigkeit N der Dimension 2. Dann ist $\det(\rho\vec{v}, x, y) \in \mathrm{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$ der Fluss durch die von x, y aufgespannte (infinitisimale) Fläche N.

7.2 Definition

Seien X, Y glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ glatt, dann definiert man durch

$$f^* = \Lambda^p T_a^* f : \Lambda^p T_{f(a)}^* Y \to \Lambda^p T_a^* X$$

und

$$f^* = T_a^{0,p} f = (T_a^* f)^{\otimes p} : T_{f(a)}^{0,p} Y \to T_a^{0,p} X$$

die pullbacks entlang f und bezeichnet auch die pullbacks von kovarianten Tensoren und p-Formen wieder mit f^*.

7.3 Satz

Die pullbacks haben folgende Eigenschaften:

(i) Seien Z eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $g : Y \to Z$ glatt, dann gilt

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

denn: $T_a^*(g \circ f) = T_a^* f \circ T_{f(a)}^* g$

(ii) Seien $\Omega \subseteq X$ offen, $\iota : \Omega \to X$ die natürliche Inklusion und ω ein (alternierender) kovarianter Tensor vom Typ $(0,p)$, dann gilt

$$\iota^* \omega = \omega\big|_\Omega .$$

(iii) Für $h \in C^\infty(Y)$ gilt

$$f^*(h\omega)_a = h(f(a)) \cdot \omega_{f(a)} \circ (T_a f)^p$$

und ferner

$$f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega',$$

$$f^*(\omega \wedge \omega') = f^*\omega \wedge f^*\omega',$$

$$f^*(\omega \otimes \omega') = f^*\omega \otimes f^*\omega'.$$

(iv) Für den Fall $f : U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{array}{ccc} f^*(dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}) & = & f^*(dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy^{i_p}) \\ \| & & \\ f^*(dy^I) & = & J(f)^I_J dx^J \end{array}$$

und

$$f^*(dy^{i_p} \otimes \cdots \otimes dy^{i_p}) = f^* dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes f^* dy^{i_p} = \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_p}.$$

Bemerkung

Für $f : U \to V$ glatt, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p = n$ ergibt sich

$$f^*(dy^I) = J^I_{\{1,...,n\}} dx^{\{1,...,n\}},$$

wobei J die Jacobimatrix bezeichnet, und falls $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ sind

$$f^*(dy^{\{1,...,n\}}) = J^{\{1,...,n\}}_{\{1,...,n\}} dx^{\{1,...,n\}} = \det(J) dx^{\{1,...,n\}}.$$

Für Karten $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$, $\psi : U_\psi \to V_\psi$ und $\omega : X \to \Lambda^p T^* X$ betrachte

$$(\varphi^{-1})^* \omega = \sum \omega_I^\varphi dx^I$$

und

$$(\psi^{-1})^* \omega = \sum \omega_J^\psi dy^J.$$

Dann hat man für die Kartenwechselabbildung $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$ die Transformationsgleichung

$$\omega_I^\varphi(x) = (\tau^* \omega^\psi)_{I,x} = \sum_I J(\tau, x)_I^J \omega_J^\psi(\tau(x)).$$

Hat man ferner für jede Karte (ρ, U_ρ) ein $\binom{n}{p}$-Tupel $(\omega_1, ..., \omega_{\binom{n}{p}})$, s.d. jeweils die Transformationsgleichung (für entsprechende τ) gilt, dann erhält man durch patching eine p-Form auf X.

7.4 Definition

Eine p-Form heißt glatt, wenn sie eine der folgenden Eigenschaft besitzt:

(i) Für alle $U \subseteq X$ offen und alle $(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_p) \in \mathcal{T}(U)^p$ ist

$$\omega\big|_U(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_p) \in C^\infty(U).$$

(ii) Die Koordinaten ω^φ sind glatt.

(iii) $\omega \in C^\infty(X, T^{0,p}X)$ ($\Leftrightarrow \omega \in C^\infty(X, \Lambda^p T^* X$ für p-Formen, da $\Lambda^p T^* X$ Untermannigfaltigkeit von $T^{0,p}X$ ist).

Der Raum der glatten p-Formen auf X wird mit $A^p(X)$ oder $\Gamma(\Lambda^p T^* X)$ bezeichnet.
Es gilt $A^0(X) = C^\infty(X)$ und $A^1(X) = \mathcal{T}^*(X)$, da $\Lambda^0 T_a^* X = \mathbb{R}$ und $\Lambda^1 T_a^* X = T_a^* X$.

Lemma

Sei X ein glatte Mannigfaltigkeit und $(\omega_U)_U$, $U \subseteq X$ offen, eine Familie von Abbildungen

$$\omega_U : \mathcal{T}(U)^p \to C^\infty(U),$$

s.d.

(i) ω_U eine (alternierende) C^∞-Multilinearform ist, d.h.

$$\omega_U(..., f\mathfrak{X} + g\mathfrak{Y}, ...) = f \cdot \omega(..., \mathfrak{X}, ...) + g \cdot \omega(..., \mathfrak{Y}, ...)$$

(ii) ω_U restriktionsverträglich ist, d.h.

$$\omega_U(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_p)\big|_V = \omega_V(\mathfrak{X}_1\big|_V, ..., \mathfrak{X}_p\big|_V),$$

dann definiert $\omega\big|_U := \omega_U$ ein (alternierendes) Tensorfeld vom Typ $(0, p)$, also im alternierenden Fall eine p-Form, auf X.

7.5 Proposition

Sei X ein glatte Mannigfaltigkeit, dann existiert für jedes $p \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$d_X^p = d^p : A^p(X) \to A^{p+1}(X),$$

genannt äußere Ableitung, für die die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) Für $p = 0$ gilt

$$d^0 : A^0(X) = C^\infty(X) \to A^1(X) = \mathcal{T}^*(X), f \mapsto df,$$

wobei df das totale Differential bezeichnet. Unter Verwendung der Charakterisierung von $\mathcal{T}^*(U)$ als Familie von Abbildungen $\mathcal{T}(U) \to C^\infty(U)$ folgt

$$df : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}(f),$$

bzw.

$$df_U : \mathcal{T}(U) \to C^\infty(U), \mathfrak{X}_U \mapsto \mathfrak{X}_U(f).$$

(ii)

$$d(f \cdot df^1 \wedge \cdots \wedge df^p) = df \wedge df^1 \wedge \cdots \wedge df^p$$

(iii) Ist $f : X \to Y$ glatt, dann gilt

$$f^*(d^p_Y \omega) = d^p_X(f^*\omega)$$

Hieraus folgen:

(a) "$d^2 = 0$", d.h. es gilt

$$d^{i+1} \circ d^i : A^i(X) \to A^{i+2}(X), \omega \mapsto 0 \quad \forall i.$$

(b) Produktregel

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta),\ \alpha \in A^p(X).$$

Beweis

Existenz

(i) Seien $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega = \omega_I dx^I$, $d\omega := \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I$

$$df \in A^1(X) \Rightarrow df = f_i dx^i$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^j} = df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = f_i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = f_i \delta^i_j = f_j$$

$\Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ lässt sich identifizieren mit $\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$

(ii) offensichtlich klar

(iii) what ever...

Für beliebige Mannigfaltigkeiten definiert man d mittels lokalen Koordinaten (das ist wohldefiniert nach (iii)).

Eindeutigkeit

Sei $(d^p)_p$ und $(\tilde{d}^p)_p$ zwei Familien, dann ist $d^p = \tilde{d}^p$ für alle $p \in X$:

$p < 0$

$$d^p : 0 \to A^{p+1}(X) \Rightarrow d^p \equiv 0$$

$p = 0$

$$d^0 : C^\infty(X) \to A^1(X) = \mathcal{T}^*(X)$$

$$d^p f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}(f) = \tilde{d}^p f(\mathfrak{X})$$

$\Rightarrow d^0 = \tilde{d}^0$

$$d^p\omega = d^p(\omega_I dx^I) = d^0\omega_I \wedge d^0x^1 \wedge \cdots \wedge d^0x^p = \tilde{d}^p(\omega_I dx^I) = \tilde{d}^p\omega.$$

Folgerungen
Übungsaufgabe.

□

DEFINITION

Seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathcal{T}(U)$, dann hat man eine Abbildung

$$\mathfrak{Y} \circ \mathfrak{X} : C^\infty(U) \to C^\infty(U), f \mapsto \mathfrak{Y}(\mathfrak{X}(f))$$

und definiert die Lie-Klammer von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mittels

$$[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] := \mathfrak{X} \circ \mathfrak{Y} - \mathfrak{Y} \circ \mathfrak{X} : C^\infty(U) \to C^\infty(U).$$

BEMERKUNG

Die Lie-Klammer erfüllt die Produktregel

$$[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}](fg) = g \cdot [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}](f) + f \cdot [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}](g)$$

und damit ist $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] \in \mathcal{T}(U)$.

DEFINITION

Um die äußeren Ableitung unabhängig von lokalen Koordinaten zu definieren fasst man $d\omega$ als Abbildung $\mathcal{T}(U)^{p+1} \to C^\infty(U)$ auf und definiert

$$\begin{aligned}(d\omega)(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_{p+1}) :=& \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{p+1} \mathfrak{X}_i \omega(\mathfrak{X}_1, ..., \hat{\mathfrak{X}}_i, ..., \mathfrak{X}_{p+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j], \mathfrak{X}_1, ..., \hat{\mathfrak{X}}_i, ..., \hat{\mathfrak{X}}_j, ..., \mathfrak{X}_{p+1})\end{aligned}$$

mit $\omega : \mathcal{T}(U)^p \to C^\infty(U)$ ($\hat{\mathfrak{X}}_i$ bedeutet dabei $..., \mathfrak{X}_{i-1}, \mathfrak{X}_{i+1}, ...$).

Bemerkung

Diese Definition steht in Einklang mit den drei Eigenschaften aus 7.5, denn

(i)
$$df(\mathfrak{X}_1) = \sum_{i=1}^{1}(-1)^{i+1}\mathfrak{X}_i f(\hat{\mathfrak{X}}_i) + \ sum_{1\le i<j\le 1}(-1)^{i+j} f(\hat{\mathfrak{X}}_i, \hat{\mathfrak{X}}_j) = \mathfrak{X}_1(f)$$

(ii) später?

(iii)

$$\begin{aligned}(f^* d_Y^p\omega)(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_{p+1}) &= d_Y^p\omega(f_*(\mathfrak{X}_1), ..., f_*(\mathfrak{X}_1))\\ &= \sum(-1)^{i+1}(f_*\mathfrak{X}_i)(\omega(f_*(\mathfrak{X}_1), ..., f_*\hat{(}\mathfrak{X}_i), ..., f_*(\mathfrak{X}_{p+1})))\\ &+ \sum(-1)^{i+j}\omega([f_*(\mathfrak{X}_i), f_*(\mathfrak{X}_j)], f_*(\mathfrak{X}_1), ..., f_*\hat{(}\mathfrak{X}_i), ..., f_*\hat{(}\mathfrak{X}_j), ..., f_*(\mathfrak{X}_{p+1}))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}d_X^p(f^*\omega)(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_{p+1}) &= \sum(-1)^{i+1}\mathfrak{X}_i(f^*\omega(\mathfrak{X}_1, ..., \hat{\mathfrak{X}}_i, ..., \mathfrak{X}_{p+1}))\\ &+ \sum(-1)^{i+j} f^*\omega([\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j], \mathfrak{X}_1, ..., \hat{\mathfrak{X}}_i, ..., \hat{\mathfrak{X}}_j, ..., \mathfrak{X}_{p+1})\\ &= \sum(-1)^{i+1}\mathfrak{X}_i(\{a \mapsto \omega_{f(a)}((f_*\mathfrak{X}_1)_a, ..., (f_*\mathfrak{X}_{p+1})_a)\})\\ &+ \sum(-1)^{i+j}\omega(f_*[\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_j], ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_i, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_j, ..., f_*\mathfrak{X}_{p+1})\\ &= \sum(-1)^{i+1}\mathfrak{X}_i(\{b \mapsto \omega_b((f_*\mathfrak{X}_1)_a, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_i, ..., (f_*\mathfrak{X}_{p+1})_a)\} \circ f)\\ &+ \sum(-1)^{i+j}\omega([f_*\mathfrak{X}_i, f_*\mathfrak{X}_j], f_*\mathfrak{X}_1, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_i, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_j, ..., f_*\mathfrak{X}_{p+1})\\ &= \sum(-1)^{i+1} f_*\mathfrak{X}_i(\omega(f_*\mathfrak{X}_1, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_i, ..., f_*\mathfrak{X}_i))\\ &+ \sum(-1)^{i+j}\omega([f_*\mathfrak{X}_i, f_*\mathfrak{X}_j], f_*\mathfrak{X}_1, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_i, ..., f_*\hat{\mathfrak{X}}_j, ..., f_*\mathfrak{X}_{p+1})\end{aligned}$$

§8 Der de-Rham Komplex

Man hat eine Kette

$$...A^{-2}(X) \xrightarrow{d^{-2}} A^{-1}(X)\ \overset{d^{-1}}{longrightarrow} A^0(X) \xrightarrow{d^0} A^1(X) \xrightarrow{d^1} A^2(X) \xrightarrow{d^2} ...,$$

den sogenannten de-Rham Komplex.

8.1 Definition

Für den de-Rham Komplex betrachte die Menge

$$Z^p(X) := \ker(d^p : A^p(X) \to A^{p+1}(X)).$$

Die Elemente $\omega \in Z^p(X)$ heißen (Ko-) Zykel bzw. geschlossene Formen und für diese gilt $d\omega = 0$.
Analog betrachtet man

$$B^p(X) := \operatorname{im}(d^{p-1} : A^{p-1}(X) \to A^p(X)).$$

Die Elemente $\omega \in B^p(X)$ heißen (Ko-) Ränder bzw. exakte Formen und es gibt $\eta \in A^{p-1}(X)$, s.d. $\omega = d^{p-1}\eta$.

Bemerkung

Exakte Formen sind geschlossene Formen, d.h. $B^p(X) \subseteq Z^p(X)$, denn für $\omega \in B^p(X)$ gilt

$$\omega = d^{p-1}\eta \text{ für ein } \eta \in A^{p-1}(X) \ \Rightarrow\ d^p\omega = d^p d^{p-1}\eta = 0,$$

aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Definition

Dieser Umstand wirft die Frage nach der "Differenz" zwischen $Z^p(X)$ und $B^p(X)$ auf. Um diese Differenz zu messen definiert man die p-te Kohomologiegruppe durch

$$H^p_{dR}(X) := {Z^p(X)}\big/{B^p(X)}.$$

Theorem von de Rham

Für eine glatte Mannigfaltigkeit gilt

$$H^p_{dR}(X) = H^p(X, \mathbb{R}).$$

Dementsprechend verwendet man die Symbole synonym.
Durch diese Definition ist dann

$$H^p(X, \mathbb{R}) = 0 \;\Leftrightarrow\; B^p(X) = Z^p(X)$$

und die Restklassen haben die Form

$$[\omega] = \{\eta \in Z^p(X) \mid \eta - \omega \in B^p(X)(\Leftrightarrow \eta - \omega = d^{p-1}\alpha, \alpha \in A^{p-1}(X) \;\Leftrightarrow\; \eta = \omega + d\alpha)\}.$$

Ist X eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, dann ist

$$\dim \Lambda^p T^* X = 0 \,\text{für } p > n \text{ und } p < 0.$$

Für diese p ist also $A^p(X) = 0$ und damit auch $H^p(X, \mathbb{R}) = 0$.
Ist $p = 0$, dann ist $B^0(X) = d(A^{-1}(X)) = d(0) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathbb{R}) = {Z^0(X)}/{0} = Z^0(X) &= \ker(d^0 : A^0 \to A^1(X)) \\ &= \{f \in C^\infty(X) \mid \operatorname{grad} f = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(X) \mid f \text{ ist lokal-konstant}\}. \end{aligned}$$

Setzt man $N := \#(\text{Zusammenhangskomponenten von } X)$, dann ist

$$H^0(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^N.$$

Für zusammenhängendes X ist also $H^0(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

8.2 Definition

Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Sterngebiet, falls es einen Sternmittelpunkt $x_S \in U$ gibt, s.d. $[x, x_S] := \{y \in U \mid y = x + (x - x_S)t, t \in [0, 1]\} \subseteq U \;\forall x \in U$.

Lemma

Seien U ein Sterngebiet in $\mathbb{R}^n$ mit Sternmittelpunkt x_S und $f \in C^\infty(U)$, dann existiert eine Funktion $F \in C^\infty(U)$, s.d. $\frac{\partial F}{\partial x^n} = f$ (für $n \geq 2$).

Beweis

Sei $x_0 \in U$. $\gamma = [x_S, x_0]$ ist als Bild einer (stetigen) Kurve kompakt, deshalb kann man γ mit endlich vielen Quadern überdecken, d.h. $\gamma \subseteq Q_1 \cup ... \cup Q_m$. Wähle nun $y_j(x_0) = y_j \in Q_j \cap Q_{j+1}$, $j = 1, ..., m-1$ mit $y_0 = x_S$ und definiere rekursiv

$$F^j : Q_j \to \mathbb{R}, \quad j = 1, ..., m-1$$

durch

$$F^0 := 0, \quad F^j(x^1, ..., x^n) := F^{j-1}(y_{j-1}) + \int_{y^n_{j-1}}^{x^n} f(x^1, ..., x^{n-1}, t)dt.$$

F^j ist offensichtlich glatt und es gilt für $1 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial F^j}{\partial x^i} = \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{y^n_{j-1}}^{x^n} f(x^1, ..., x^{n-1}, t)dt = 0 + \int_{y^n_{j-1}}^{x^n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, ..., x^{n-1}, t)dt$$

und entsprechend

$$\frac{\partial F^j}{\partial x^n}(x) = \frac{\partial F^{j-1}}{\partial x^n} + \frac{\partial}{\partial x^n} \int_{y^n_{j-1}}^{x^n} f(x^1, ..., x^{n-1}, t)dt = 0 + f(x^1, ..., x^n).$$

Definiere $F(x_0) := F^m(x_0)$. Für x_0 sieht man leicht, dass dies unabhängig von der Wahl der Quader ist, da der Schnitt zweier Quader wieder ein Quader ist. Sei nun x_1 sehr nahe bei x_0, dann darf man annehmen, dass für alle $0 \leq j \leq m-1$ gilt

$$y_j(x_1) = y_j(x_0)$$

und somit

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{y^n_{j-1}}^{y^n_j} f(y^1_{j-1}, ..., y^{n-1}_{j-1}, t)dt + \int_{y^n_{m-1}}^{x^n_i} f(x^1_i, ..., x^{n-1}_i, t)dt, \ i \in \{0, 1\},$$

also ist F glatt mit $\frac{\partial F}{\partial x^n} = f$. $\square$

Bemerkung

Lemma 8.2 und sein Beweis gelten auch für einfach zusammenhängende Gebiete. Auch der folgende Satz gilt für einfach zusammenhängende Gebiete und wird unter Benutzung von 8.2 bewiesen, aber der hier vorgeführte Beweis geht auf einfach zusammenhängenden Gebieten leider nicht durch.

8.3 Poincaré-Lemma

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet, dann gilt

$$H^p(U, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis

Da U ein Sterngebiet ist, ist U insbesondere zusammenhängend, d.h. $H^0(U, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Es bleibt z.z., dass aus $\omega \in Z^p(U)$ ($\Leftrightarrow dw = 0$) folgt $\omega \in B^p(U)$ ($\Leftrightarrow \omega = d\eta$) für $0 < p \leq \dim U = n$.
Induktion nach n:

IA: $n = 1$
Da $n = 1$ ist auch $p = 1$, also $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und ein $\omega \in Z^1(U)$ ist von der Form $\omega = f(t)dt$. Œ ist $0 \in U$, setzt man also

$$F(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

dann ist

$$\dot{F} = f$$

und damit $dF = f(t)dt = \omega \in B^1(U)$.
IS: $n - 1 \to n$
Sei

$$\omega = \omega_J dx^J = \underbrace{\sum_{n \notin J} \omega_J dx^J}_{=:\alpha} + \sum_{n \in J} \omega_J (dx^{J \setminus \{n\}} \wedge dx^n) = \alpha + \underbrace{\left(\sum_{n \in J} \omega_J dx^{J \setminus \{n\}} \right)}_{=:\beta} \wedge dx^n = \alpha + \beta \wedge dx^n,$$

dann ist $\omega_J(x^1, ..., x^n) \in C^\infty(U)$.

Nach dem vorrausgegangenem Lemma existiert nun F_J, s.d. $\frac{\partial F_J}{\partial x^n} = \omega_J$

Behauptung

dx^n kommt nicht in $\omega - \underbrace{(-1)^{p-1}}_{=:\epsilon} d(F_J dx^{J\setminus\{n\}})$ vor.

Beweis

$$\begin{aligned}
\omega - \epsilon \cdot dF_J \wedge dx^{J\setminus\{n\}} &= \omega - \epsilon \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}} \\
&= \alpha + \beta \wedge dx^n - \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}} - \epsilon \frac{\partial F_J}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^{J\setminus\{n\}} \\
&= \alpha + \beta \wedge dx^n - \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}} - \epsilon dx^n \wedge \frac{\partial F_J}{\partial x^n} dx^{J\setminus\{n\}} \\
&= \alpha + \beta \wedge dx^n - \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}} - \epsilon dx^n \wedge \beta \\
&= \alpha + \beta \wedge dx^n - (-1)^{p-1} \epsilon \beta \wedge dx^n - \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}} \\
&= \alpha - \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{J\setminus\{n\}}
\end{aligned}$$

Es bleibt z.z., dass

$$\omega - d(F_J dx^{J\setminus\{n\}}) = d\eta.$$

Sei also $\omega = \omega_I dx^I$ mit $n \notin I, \omega \in Z^p(U) \Leftrightarrow d\omega = 0 = \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial \omega_I}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^I$.
Es ist bekannt, dass dx^K ein Erzeugendensystem des freien (endlichen) Moduls $A^{p+1}(U)$ bilden. Also $d\omega = \Delta_K dx^K = 0 \Rightarrow \Delta_K = 0 \,\forall\, K \subseteq \{1, ..., n\}$, $|K| = p+1$.
Wenn $n \notin K$, dann kann/wird Δ_K Linearkombination aus den $\frac{\partial \omega_I}{\partial dx^i}$ mit $I \cup \{i\} = K$ sein.
Wenn aber $n \in K$ ist, dann muss $i = n$ gelten, da $n \notin I$ ist und somit $K\setminus\{n\} = I$, I ist eindeutig bestimmt, d.h. $0 = \Delta_K = \frac{\partial \omega_{K\setminus\{n\}}}{\partial x^n}$.
Also sind alle ω_I konstant bzgl. $x^n \Rightarrow \omega(x^1, ..., x^n) = \omega_I(x^1, ..., x^{n-1}) dx^I$. Die rechte Seite kann als p-Form auf $(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cap U$ aufgefasst werden, sie lebt also in der

Dimension $n-1$ und ω ist somit exakt.

$\square$

§9 Orientierung

DEFINITION

Ein Diffeomorphismus $f : U \to V$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt orientierungserhaltend, falls

$$\det J(f, a) > 0 \quad \forall\, a \in U.$$

BEISPIEL

Betrachte den Diffeomorphismus $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x^1, ..., x^n) \mapsto (x^1, ..., x^{n-1}, -x^n)$, dann ist $J(\sigma, \cdot) = \det \sigma = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \sigma = -1$, also ist σ nicht orientierungserhaltend (anschaulich ist das klar, denn σ beschreibt eine Spiegelung).

DEFINITION

Ein Atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}$ heißt orientiert, falls

$$\det J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}, a) > 0 \quad \forall\, i, j,\ \forall\, a \in \varphi_j(U_i \cap U_j).$$

Die Karten φ_i, φ_j heißen in diesem Fall orientierungsverträglich.

BEMERKUNG

Jeder Atlas mit nur einer Karte ist orientiert (z.B. $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$).

DEFINITION

Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen orientierungsverträglich, falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ orientierungsverträglich sind. Diese Festlegung definiert eine Äquivalenzrelation $\mathcal{A} \sim_o \mathcal{B}$.

9.1 DEFINITION

Eine glatte Mannigfaltigkeit $(X, [\mathcal{A}]_d)$ heißt orientierbar, falls ein orientierter Atlas $\mathcal{O}$ existiert, s.d. $[\mathcal{A}]_d = [\mathcal{O}]_d$ ($\Leftrightarrow \mathcal{A} \sim_d \mathcal{O}$) gilt.

9.2 DEFINITION

Die Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]_o$ eines orientierten Atlas $\mathcal{A}$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X heißt Orientierung auf X.

Bemerkung

Sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas auf X, dann ist $(X, [\mathcal{A}]_o)$ orientierbar. In Anlehnung an die Menge $\mathcal{A}_{\max} = \{\text{Karten auf } (X, [\mathcal{A}]_d)\} = \{\text{Diffeomorphismen von } X \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{R}^n\}$ definiert man

$$\mathcal{A}^+_{\max} = \{(\psi, U_\psi) \in \mathcal{A}_{\max} \mid \det J(\psi \circ \varphi^{-1}, \cdot) > 0 \,\forall\, \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Definition

Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(X, [\mathcal{A}]_o)$ aus einer glatten Mannigfaltigkeit X und einer Orientierung $[\mathcal{A}]_o$ auf X.

Bemerkung

Sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas und $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, dann definiert man

$$\mathcal{A}^\rho := \{\psi = \rho \circ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Damit ist $\mathcal{A}^\rho$ ein orientierter Atlas, denn für ψ_i, ψ_j ist

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} = \rho \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \rho^{-1}, \det J(\psi_i \circ \psi_j^{-1}, \cdot) = \underbrace{\det J(\rho) \cdot \det J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}, \cdot) \cdot \det J(\rho^{-1})}_{=\det J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})} > 0.$$

Wählt man für ρ die Spiegelung

$$\sigma = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so gilt $\mathcal{A} \not\sim_o \mathcal{A}^\sigma$.
Fasst man $[\mathcal{A}]_o$ als Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit auf, dann heißt $[\mathcal{A}^\sigma]_o$ entgegengesetzte Orientierung.
Man wird später sehen, dass für einen beliebigen Diffeomorphismus ρ entweder $\mathcal{A} \sim_o \mathcal{A}^\rho$ oder $\mathcal{A}^\sigma \sim_o \mathcal{A}^\rho$ gilt.

Lemma

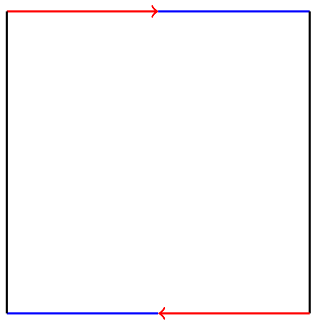
Eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit von der Dimension ≥ 1 besitzt entweder keine, oder genau zwei Orientierungen, die einander entgegengesetzt sind. Es gibt jedoch keine eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne Orientierungen.

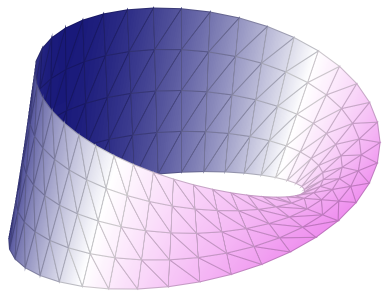
Beweis

Übungsaufage.

Beispiel

(i) Das Möbiusband ist eine zweidimensionale nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit. (Beweis: Übungsaufgabe)





Das Möbiusband $\mathbb{M}$ entsteht durch Drehen in Richtung der Pfeile und Verkleben der beiden roten Abschnitte.
In Formeln bedeutet dies, dass das Möbiusband gerade

$$\mathbb{M} := {}^{[0,1] \times (-1,1)}\!\big/_{\sim} = {}^{\mathbb{R} \times (-1,1)}\!\big/_{\sim}$$

mit der Äquivalenzrelation

$$(t,v) \sim (s,u) \quad \Leftrightarrow \quad t-s \in \mathbb{Z} \;\&\; v = -u$$

ist.

(ii) Der projektive Raum $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = {}^{\mathbb{R}^{n+1}}\!\big/_{\sim}$ bzgl. der Relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : x = \lambda y \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\},$$

(Geraden durch 0 in $\mathbb{R}^{n+1}$) ist nicht orientierbar, falls n gerade ist. Intuitiv lässt sich $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ als “halbe“ Sphäre auffassen ($\overline{v} \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \Rightarrow ||\frac{v}{||v||}|| = 1 \Rightarrow \frac{v}{||v||} := w \in S^{n+1}$, aber auch $-w \in S^{n+1}$, “$v \sim w \sim -1 \cdot w$“).

Bemerkung

Ist X eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 2, dann enthält X das Möbiusband als Teilmenge.

Definition

Seien $(X, [\mathcal{A}]_o)$ und $(Y, [\mathcal{B}]_o)$ orientierte Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ ein Diffeomorphismus, dann heißt f orientierungserhaltend, falls $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$ orientierungserhaltend ist ($\Leftrightarrow \psi \circ f \in \mathcal{A}^+_{\max}$).

Definition

Seien X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\Omega \subseteq X$ offen, dann heißt ein Punkt $a \in \partial\Omega \cap X$ glatter Randpunkt, falls es eine Karte (φ, U_φ) gibt mit $a \in U_\varphi$ und

$$\varphi(\Omega \cap U_\varphi) = \{y = (y^1, ..., y^n) \in V_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \mid y^n > 0\},$$

$$\varphi(\partial\Omega \cap U_\varphi) = \{y = (y^1, ..., y^n) \in V_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \mid y^n = 0\},$$

wobei $n = \dim_a X$ ist.
Ω hat einen glatten Rand, falls alle $a \in \partial\Omega$ glatt sind.

Bemerkung

Hat Ω eine glatten Rand, dann ist $\partial\Omega$ eine eingebettete glatte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 von X, denn $\varphi(\partial\Omega \cap U_\varphi) = \{y \in V_\varphi \mid y^n = 0\}$.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, z.B. ist für $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R} \times \{0\})$ der Rand $\partial\Omega = \mathbb{R} \times \{0\}$ in $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id})$ und es gilt

$$\mathrm{id}(\Omega \cap \mathbb{R}^2) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \neq 0\} \supsetneq \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 0\},$$

aber $\partial\Omega$ ist offensichtlich eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.

Bemerkung

Ω hat einen glatten Rand $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ ist glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit und besitzt eine Innen/Außen-Unterscheidung.

LEMMA

Seien X eine orientierte Mannigfaltigkeit und $\Omega \subseteq X$ offen mit glattem Rand, dann ist $\partial\Omega$ orientierbar.

BEWEIS

Mittels Innen/Außen-Unterscheidung. Die Karten (φ, U_φ) für die glatten Randpunkte liefern einen Atlas $\mathcal{A}$ auf $\partial\Omega$, was schon aus der Konstruktion/Definition der eingebetteten Untermannigfaltigkeit ersichtlich ist (vgl. S. 32). Betrachte nun die Kartenwechselabbildung $\tau = \psi \circ \varphi^{-1}$ (für $\psi \in \mathcal{A}$) und ihre Einschränkung

$$\vartheta = pr_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \psi \circ \varphi^{-1}(x^1, ..., x^{n-1}, 0),$$

dann ist $\det J(\tau) > 0$, da X orientierbar ist.

BEHAUPTUNG

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} J(\vartheta) & * \\ 0 & c \end{pmatrix} quad\text{mit } c > 0.$$

BEWEIS

Übungsaufgabe.

$\Rightarrow \det J(\tau) = \det J(\vartheta) \cdot c \Rightarrow \det J(\vartheta) > 0.$ $\square$

§10 Partition der Eins und Integrale

Im folgenden sollen nur p-Formen betrachtet werden, für die nur gilt

$$\omega \in \mathrm{Abb}(X, \Lambda^p T^* X)$$

und

$$\mathrm{id}_X = pr_X \circ \omega.$$

Für solche ω gilt dann

$$\omega \text{ ist stetig } \Leftrightarrow \ \omega \in C^0(X, \Lambda^p T^* X) \ (\Leftrightarrow \text{ die Komponenten von } \omega \text{ stetig sind}).$$

Man bezeichnet die Räume dieser p-Formen, in Anlehnung an die Notation für glatte p-Formen, mit $\Gamma_{\mathrm{Abb}}(\Lambda^p T^* X)$ respektive $\Gamma_{C^0}(\Lambda^p T^* X)$.

Definition & Bemerkung

Seien $(X, \mathcal{A})$ eine orientierte reindimensionale Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω, ω' Topformen, d.h. $\omega, \omega' \in \Gamma_{\mathrm{Abb}}(\Lambda^n T^* X)$, dann definiert man eine Ordnungsrelation für Topformen durch

$$\omega \geq \omega' \ \Leftrightarrow \ \eta = \omega - \omega' \geq 0.$$

Seien dazu ψ, φ Karten und $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$ der zugehörige Kartenwechsel, dann gilt

$$(\psi^{-1})^* \eta = \eta^{\psi}_{1\ldots n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

$$(\varphi^{-1})^* \eta = \eta^{\varphi}_{1\ldots n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

und

$$(\tau)^*((\varphi^{-1})^* \eta) = (\psi^{-1})^* \eta.$$

Folglich ist $\det J(\tau) \cdot \eta^{\varphi}_{1\ldots n} = \eta^{\psi}_{1\ldots n}$ und man definiert

$$\eta^{\psi}_{1\ldots n} > 0 \ \Leftrightarrow \ \eta^{\varphi}_{1\ldots n} > 0 \ \Leftrightarrow: \ \eta > 0.$$

Definition

Man definiert den Betrag(respektive die Betragsform $|\omega| \in \Gamma_{C^0}(\Lambda^n T^* X)$) einer Topform durch

$$|\omega|_p := \begin{cases} \omega_p & \omega_p \geq 0, \\ -\omega_p & \omega_p \leq 0. \end{cases}$$

oder

$$|\omega|\big|_{U_\varphi} := \varphi^* \left|(\varphi^{-1})^* \left(\omega|_{U_\varphi}\right)\right| \quad \text{für eine Karte } (\varphi, U_\varphi).$$

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann hat eine Topform die Gestalt $\omega = \omega_{1\ldots n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Ist $\omega_{1\ldots n}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, d.h. $\omega_{1\ldots n} \in C_c^0(U)$, vgl. S. 10, dann definiert man

$$\int_U \omega := \int_U \omega_{1\ldots n}(x^1, ..., x^n) d\mu_{Leb}^n.$$

Bemerkung

Analog zu oben, kann man für ω in $\Gamma_{\mathrm{Abb}}(\Lambda^p T^* X)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X zeigen, dass die Aussagen $\omega_x = 0$ und $\omega_x \neq 0$ wohldefiniert sind, vgl. Übungsaufgabe.
Man kann also auch für stetige p-Formen in $\Gamma_{C^0}(\Lambda^p T^* X)$ den Träger

$$\mathrm{supp}(\omega) = \overline{\{x \in X \mid \omega_x \neq 0\}}$$

definieren und überprüfen, ob er kompakt ist.
Den Raum der stetigen p-Formen mit kompaktem Träger bezeichnet man mit $\Gamma_{C_C^0}(\Lambda^p T^* X)$.
Der Unterraum der glatten p-Formen wird mit $A_C^p(X)$ bezeichnet.

Bemerkung

Seien X eine orientierte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Gamma_{C_C^0}(\Lambda^n T^* X)$ mit $n = \dim X$ und $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq U_\varphi$ dem Definitionsbereich einer Karte (φ, U_φ), dann definiert man

$$\int_{U_\varphi} \omega := \int_{V_\varphi} \omega_{1\ldots n}^\varphi(x^1, ..., x^n) \underbrace{dx^1 \cdots dx^n}_{= d\mu_{Leb}^n}.$$

Diese Definition ist wohldefiniert, denn sei (ψ, U_ψ) eine weitere Karte mit $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U_\psi$, dann ist

$$\omega^\psi_{1\ldots n} = ((\psi^{-1})^*\omega)_{1\ldots n}.$$

Für den Kartenwechsel $\tau = \psi \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \to V_\psi$ folgt

$$\int_{V_\psi} \omega^\psi_{1\ldots n} d\mu = \int_{\tau(V_\varphi)} \omega_{1\ldots n}^{psi} d\mu = \int_{V_\psi} \omega^\varphi_{1\ldots n}(\tau) |\det J(\tau)| d\mu = \int_{V_\psi} \omega^\varphi_{1\ldots n}(\tau) \det J(\tau) d\mu = \int_{V_\varphi} \omega^\varphi_{1\ldots n} d\mu$$

aus dem Transformationssatz für Lebesgue-Integrale (vgl. S. 18) und dem Transformationsverhalten von Topformen (vgl. S. 62).

Zerlegung der Eins (schwache Formulierung)

Seien X ein topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $U_1, ..., U_n \subseteq X$ alle offen, s.d. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$, dann existieren $\eta_i \in C^0_c(X, [0,1])$ mit $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$ und $\sum_{i=1}^n \eta_i(x) = 1$ $\forall\, x \in X$.

Anwendung

Sei $\omega \in \Gamma_{C^0_C}(\Lambda^n T^* X)$ und bezeichne $K := \operatorname{supp}(\omega)$ den (kompakten) Träger von ω, dann ist $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\varphi_i}$ für Karten $(\varphi_i, U_{\varphi_i})$. Dann gibt es eine Zerlegung der Eins $\eta_i \in C^0_c(U_{\varphi_i})$. Wegen $\omega = 1 \cdot \omega = \left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right) \cdot \omega = \sum_{i=1}^n \eta_i \omega$ definiert man

$$\int_X \omega := \sum_{i=1}^n \int_X \eta_i \omega.$$

Diese Definition ist wohldefiniert, da $\operatorname{supp}(\eta_i\omega) \subseteq U_{\varphi_i}$, und unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins (vgl. Übungsaufgabe).

Zerlegung der Eins (starke Formulierung)

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Überdeckung durch offene Mengen $(U_i)_{i \in I}$, dann existieren

$$\eta_i \in C^\infty(X, [0,1]) \text{ mit } \operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i,$$

die folgende Eigenschaften erfüllen

(i) Für alle $x \in X$ existiert eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq X$, s.d. für fast alle i gilt $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq \Omega^c$ (lokale Endlichkeit).

(ii) $\sum\limits_{i \in I} \eta_i(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Anwendung

Mittels der starken Zerlegung der Eins könnte man beliebige Topformen $\omega \in \Gamma_{\text{Abb}}(\Lambda^n T^* X)$ integrieren (wenn man das Problem $\int_X \omega = \infty$ verkraften könnte):

$$\int_X \omega := \sum_{i \in I} \int_{V_{\varphi_i}} (\varphi_i^{-1})^*(\eta_i \omega).$$

Eine zweite Anwendung stellt das folgende Lemma dar.

Lemma

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit, dann existiert ein $\omega \in \Gamma(\Lambda^n T^* X)$ mit $\omega_p \neq 0$ $\forall\, p \in X$. Man nennt ω Volumenform.

Beweis

Seien $\varphi_i : U_{\varphi_i} \to V_{\varphi_i}$ orientierte Karten, dann definiert man

$$\hat{\omega}_i := \varphi_i^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

Wähle zu $X \subseteq \bigcup\limits_i U_{\varphi_i}$ eine starke Zerlegung der Eins mit $\operatorname{supp}(\eta_i) \subseteq U_i$ und definiere

$$\omega_i := \eta_i \cdot \hat{\omega}_i \text{ und } \omega := \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_i.$$

Diese Definition ist wohldefinert, da lokal endlich.

Behauptung

Für $p \in U_{\varphi_k}$ gilt $((\varphi_k^{-1})^* \omega)_p > 0$.

Beweis

Es gibt ein j, s.d. $\eta_j(p) > 0$, da $\sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i(p) = 1 > 0$.
Ferner gilt

$$(\varphi_k^{-1})^*\omega = (\varphi_k^{-1})^* \left(\sum_{i=1}^{N} \eta_i (\varphi_i)^*(dx^{\{1,\ldots,n\}}) \right) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \circ \varphi_k^{-1} \cdot (\varphi_k^{-1} \circ \varphi_i)^*(dx^{\{1,\ldots,n\}}).$$

Bei den $dx^{\{1,\ldots,n\}}$ handelt es sich um die kanonischen Topformen auf den Karten φ_i. Man erhält also auf U_{φ_k}

$$(\varphi_k^{-1})^*\omega = \left(\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\eta_i \cdot \varphi_k^{-1}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\det J(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_i)}_{>0} \right) \cdot dx^{\{1,..,n\}}$$

mit einer strikt positiven Summe.

□

Hieraus folgt die Aussage des Lemmas.

□

Korollar

Sei $\xi \in \Gamma(\Lambda^n T^* X)$, dann existiert ein $f \in C^\infty(X)$ mit $\xi = \omega \cdot f$, also gibt es einen $C^\infty(X)$-Modulisomorphismus

$$\Gamma(\Lambda^n T^* X) \cong C^\infty(X).$$

Beweis

siehe Übungsblatt □

Theorem

Für eine glatte Mannigfaltigkeit X sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) X ist orientiert,

(ii) auf X existiert eine Volumenform ω, d.h. $\omega \in A^n(X) = \Gamma(\Lambda^n T^* X)$ und $\omega_p > 0$ für alle $p \in X$,

(iii) es gibt einen $C^\infty(X)$-Modul-Isomorphismus

$$\Gamma(\Lambda^n T^* X) \cong C^\infty(X),$$

(iv) es gibt eine Familie von Orientierungen $(O_p)_{p\in X}$ in den Tangentialräumen T_pX.

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)
siehe oben
(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i)
siehe Übungsblatt
(i) $\Leftrightarrow$ (iv)
siehe Lemma S. 97

$\square$

Definition & Bemerkung

Mit der gleichen Konstruktion wie oben erhält man die Isomorphismen

$$C^0_C(X) \cong \Gamma_{C^0_C}(\Lambda^n T^* X), \quad f \mapsto f \cdot \omega$$
$$\mathrm{Abb}(X) \cong \Gamma_{\mathrm{Abb}}(\Lambda^n T^* X), \quad f \mapsto f \cdot \omega$$

für eine orientierte Mannigfaltigkeit X mit Volumenform ω. Da die Integration für $\Gamma_{C^0_C}(\Lambda^n T^* X)$ wohldefiniert ist, erhält man ein Radon-Maß auf der linken Seite $C^0_C(X)$. Nun kann der Daniell-Lebesgue-Prozess aus Kapitel 1 ausgeführt werden.
D.h. eine Topform $\eta = f \cdot \omega$ ist integrierbar, falls eine Folge von stetigen Topformen mit kompakten Trägern $\eta_k = f_k \cdot \omega$ existiert, s.d. gilt

$$\|\eta - \eta_k\|_{L^1} = \|f - f_k\|_{L^1} \to 0.$$

Man bezeichnet den Raum der integrierbaren Topformen mit $\Gamma_{L^1}(\Lambda^n T^* X)$. Für die Menge der Topformen, die zugleich glatt und integrierbar sind, verwendet man das Symbol $A^n_{L^1}(X)$.
Entsprechend ist das Integral einer Topform η über eine offene Teilmenge U (mit kom-

pakten Abschluss?) mittels der charakteristischen Funktion χ_U definiert :

$$\int_U \eta := \int_X \chi_U \cdot \eta.$$

Wählt man eine beliebige Folge stetiger(oder sogar glatte) Funktionen f_n mit kompaktem Träger, welche monoton wachsend gegen die charakteristische Funktion χ_U konvergieren, dann gilt

$$\int_U \eta = \int_X \chi_U \cdot \eta = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \cdot \eta.$$

§11 Der Satz von Stokes

Definition

Seien X eine orientierte Mannigfaltigkeit und Y eine eingebettete orientierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension d. Für $\omega \in A^{n-d}(X)$ definiert man dann

$$\int_Y \omega := \int_Y \iota^* \omega$$

mit Hilfe der natürlichen Inklusion $\iota : Y \hookrightarrow X$.
Man wählt die Orientierung auf Y, s.d. für $Y = \partial\Omega$ gilt

$$\varphi(\Omega \cap U_\varphi) = \{y \in V_\varphi \mid (-1)^n y^n > 0\}.$$

11.1 Satz von Stokes

Sei X eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\Omega \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit glattem Rand. Für ω in $A^{n-1}(X)$ mit $d\omega \in \Gamma_{L^1}(\Lambda^n T^* \Omega)$, also eine glatte $(n-1)$-Form, deren Ableitung auf Ω integrierbar ist, gilt

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Beweis

Für jeden Punkt $x \in X$ gibt man eine Karte φ_x an, s.d. gilt

1. $x \notin \partial\Omega \Rightarrow \partial\Omega \cap U_\varphi = \emptyset$;
2. $\varphi_x : U_\varphi \to V_\varphi = (-C, C)^n \subset \mathbb{R}^n$;
3. $x \in \partial\Omega \Rightarrow \varphi_x(\partial\Omega \cap U_\varphi) = (-C, C)^{n-1} \times (0, C)$.

Mit der starken Formulierung der Partition der Eins erhält man eine Familie von glatten Funktionen mit kompaktem Träger $(\eta_x)_{x \in X} \subset C_C^\infty(X, [0,1])$ mit $\operatorname{supp}(\eta_x) \subset U_x$.
Wegen der lokalen Endlichkeit werden sehr viele dieser η_x identisch 0 sein! Die restlichen bezeichnet man nun mit $(\eta_i)_{i \in I}$. Dann gilt

$$\omega = \left(\sum_{i \in I} \eta_i \right) \cdot \omega$$

und deshalb

$$d\omega = d\left(\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right)\cdot\omega\right) = \sum_{i\in I}\eta_i\cdot d\omega + (-1)^{0(n-1)}\underbrace{d\left(\sum_{i\in I}\eta_i\right)}_{=1}\wedge\,\omega.$$

Die Cartan-Ableitung ist wie der Name schon andeutet ein lokaler Operator, s.d. es sich für sie nur um eine endliche Summe handelt, mit der sie ja vertauscht. Man erhält also

$$d\omega = \sum_{i\in I} d(\eta_i\cdot\omega).$$

Damit ergibt sich für das Integral von ω über Ω

$$\int_\Omega d\omega = \int_X \chi_\Omega\cdot d\omega = \int_X \chi_\Omega\cdot\sum_{i\in I} d(\eta_i\omega) = \sum_{i\in I}\int_X \chi_\Omega\cdot d(\eta_i\omega).$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen dem Satz über die dominierte Konvergenz und der Tatsache, dass aus $f\in L^1$ folgt $|f|\in L^1$. Da der Träger von $\eta_i\omega$ kompakt in U_{φ_i} enthalten ist, findet die folgende Behauptung Verwendung :

Behauptung

Gilt der Satz von Stokes für glatte $(n-1)$-Formen mit kompakten Träger auf dem Kartenbid V_φ, so ist er auch auf dem Kartenblatt U_φ für selbige Formen gültig.

Beweis

Sei $\varphi : U = U_\varphi \to V = V_\varphi$ eine Karte mit $\omega\in A_C^{n-1}(U)$ dann gilt

$$\int_U d\omega = \int_V (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_V (d(\varphi^{-1})^*\omega).$$

Entsprechend gilt für $\chi_{U\cap\Omega} = \lim_n f_n$ mit $f_n\in C_C^\infty(X)$

$$\begin{aligned}\int_{U\cap\Omega} d\omega &= \int_U \chi_{U\cap\Omega}\cdot d\omega = \lim_n\int_U f_n\cdot d\omega = \int_V(\varphi^{-1})^*(f_n\cdot d\omega)\\ &= \int_V(\varphi^{-1})^*(\chi_{\varphi(U\cap\Omega)}\cdot d\omega). = \int_{\varphi(U\cap\Omega)}(\varphi^{-1})^*(d\omega)\end{aligned}$$

Vertauscht man nun Differentiation und Pullback und wendet anschließend Stokes an erhält man

$$\int_{U\cap\Omega} d\omega = \int_{V\cap\varphi(\Omega)} d((\varphi^{-1})^*\omega) = \int_{V\cap\partial(\varphi(\Omega))} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{V\cap\varphi(\partial\Omega)} (\varphi^{-1})^*\omega$$
$$= \int_{\varphi(U\cap\partial\Omega)} \iota^* \circ (\varphi^{-1})^*\omega = \cdots = \int_{U\cap\partial\Omega} \iota^*\omega$$

□

Es reicht also aus Stokes auf Quadern des $(-C,C)^n \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega = (-C,C)^{n-1}\times(0,C)$ oder $\Omega = (-C,C)^n$ zu beweisen :
Sei ω eine Topform in $A_C^{n-1}([-C,C]^n)$ dann ist

$$d\omega = d(\omega_I dx^I) = \frac{\partial\omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I = \frac{\partial\omega_{\{1..n\}\setminus\{i\}}}{\partial x^i}(-1)^{1\cdot(i-1)} dx^{\{1..n\}}.$$

Es gilt zudem

$$\int_{-C}^{C} \frac{\partial\omega_{\{1..n\}\setminus\{i\}}}{\partial x^i} dx^i = \omega_{\{1..n\}\setminus\{i\}}\Big|_{-C}^{C} = 0 - 0 = 0,$$

da ω einen kompakten Träger besitzt. Fubini impliziert nun

$$\int_{(-C,C)^n} \frac{\partial\omega_{\{1..n\}\setminus\{i\}}}{\partial x^i} d\mu = 0.$$

Ist also $\Omega = (-C,C)^n$, was äquivalent zu $\partial\Omega = \emptyset$ ist, dann gilt

$$\int_\Omega d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{(-C,C)^n} \frac{\partial\omega_{\{1..n\}\setminus\{i\}}}{\partial x^i} d\mu = 0,$$

was mit $\int_\emptyset \omega$ übereinstimmt.
Im Fall $\Omega = (-C,C)^{n-1}\times(0,C)$ ergibt sich analog

$$\int_\Omega d\omega = (-1)^{n-1} \int_{(-C,C)^{n-1}\times(0,C)} \frac{\partial\omega_{\{1..n-1\}}}{\partial x^n} d\mu = (-1)^{n-1} \int_{(-C,C)^{n-1}} \left(\int_0^C \frac{\partial\omega_{\{1..n-1\}}}{\partial x^n} dx^n \right) d\mu.$$

Das innere Integral ist gerade

$$\omega_{\{1..n-1\}}(x^1,\dots,x^{n-1},t)\Big|_0^C = 0 - \omega_{\{1..n-1\}}(x^1,\dots,x^{n-1},0)$$

und somit erhält man

$$\int_\Omega d\omega = (-1)^n \int_{(-C,C)^{n-1}} \omega_{\{1..n-1\}}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) d\mu.$$

Dies entspricht fast(!) dem Integral von $\iota^*\omega$ auf dem Rand $\partial\Omega = (-C, C)^{n-1} \times \{0\}$. Denn für die Inklusion $\iota(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}, 0)$ gilt

$$\iota = T\iota = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \iota^* = \Lambda^{n-1}(T\iota) = (1, 0, \dots, 0).$$

$\square$

Bemerkung

Man kann den Satz von Stokes auch allgemeiner formulieren:
Habe Y die Menge der glatten Punkte des Randes $\partial\Omega$ das gleiche Oberflächenmaß wie $\partial\Omega$ und sei $K := (\Omega \cup Y) \cap \operatorname{supp}(\omega)$ kompakt. Dann gilt

$$\int_\Omega d\omega = \int_Y \omega.$$

Gewisse Autoren formulieren Stokes wie folgt

Korollar

Seien X eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n , $\Omega \subseteq X$ offen mit glattem Rand und kompaktem Abschluß $\overline{\Omega}$ und $\omega \in A^{n-1}(X)$. Falls $K := \overline{\Omega} \cap \operatorname{supp}(\omega)$ kompakt ist, dann gilt

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

Beweis

Wegen der Kompaktheit von K wird ω auf Ω integrierbar sein.

Korollar

(i) Seien X eine reindimensionale, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\omega \in A^{n-1}(X)$, dann ist

$$\int_X d\omega = 0.$$

(ii) Seien X eine orientierte, reindimensionale Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\omega \in A_c^{n-1}(X)$ (d.h. ω habe einen kompakten Träger), dann ist

$$\int_X d\omega = 0.$$

Beweis

(i) $X = \Omega \Rightarrow \partial\Omega = \emptyset$ und

$$\int_\emptyset \omega = 0.$$

(ii) ...

$\square$

11.2 Proposition

Sei X eine reindimensionale, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n, dann gilt

$$H^n(X, \mathbb{R}) \neq 0.$$

Beweis

Übungsaufgabe.

Beispiel

Später wird noch gezeigt, dass gilt

$$H^n(S^n, \mathbb{R}) = H^0(S^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Kapitel 3: Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

§1 Riemann'sche Metriken

Definition

Eine semi-Riemann'sche Metrik auf einer glatten Mannigfaltigkeit X ist ein (0,2)-Tensor g, d.h. $g \in \mathcal{T}^{0,2}(X)$, s.d. g_p eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform auf T_pX für alle $p \in X$ ist. Ist zu dem g_p positiv definit für alle $p \in X$, so heißt g Riemann'sche Metrik.
Ein Paar (X, g) bestehend aus einer glatten Mannigfaltigkeit X und einer (semi-) Riemann'schen Metrik g heißt (semi-) Riemann'sche Mannigfaltigkeit.

Beispiel

(i) Das Standardskalrprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ definiert durch

$$g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

eine Riemann'sche Metrik auf $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Einsteins Raumzeit ist eine vierdimensionale glatte Mannigfaltigkeit und wird mit

$$g_p(v, w) := v^t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w$$

zu einer semi-Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

Bemerkung

Ist $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann lässt sich eine Metrik $g \in \mathcal{T}^{0,2}(U) = C^\infty(U, M_n(\mathbb{R}))$ durch

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$$

mit einer Matrix $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(C^\infty(U))$ identifizieren.

Beispiel

(i) Ist $X = S^2$, dann ist

$$g_p(A, B) := g_{\varphi(p)}(\varphi_* A, \varphi_* B),$$

also $g = \varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ für irgendeine Karte φ, eine glatte Riemann'sche Metrik auf X.

(ii) Ist $X = \mathbb{R}^n$, dann ist

$$g_x := \begin{pmatrix} e^{-(x^1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

eine glatte Riemann'sche Metrik auf X.

(iii) Ist $X = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = y > 0\}$ die obere Halbebenen, dann ist

$$g_z = \frac{1}{y^k} \cdot I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^k} \end{pmatrix}$$

eine glatte Riemann'sche Metrik auf X. Für $k = 2$ heißt sie die hyperbolische Metrik und $(\mathbb{H}, g)$ ist der hyperbolische Raum. Sie definiert eine die Volumenform

$$\omega_g = \frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

auf $\mathbb{H}$.Der Fundamentalbereich $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 1, |z| \geq 1\}$ hat dann das Volumen

$$\operatorname{vol}_g(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} \omega_g = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Bemerkung

Eine Riemann'sche Metrik g auf X induziert durch

$$d_g(p,q) := \inf\{l_g(\gamma) \mid \gamma \text{ ist regulär und verbindet } p \text{ mit } q\}$$

eine topologische Metrik d_g auf X. Dabei ist γ regulär, falls γ injektiv ist und $\dot\gamma(t) > 0$ für alle t ist, und $l_g(\gamma)$ bezeichnet die Länge der Kurve γ und ist gegeben durch

$$l_g(\gamma) := \int_I \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}dt.$$

Lemma

Eine Riemann'sche Metrik g lässt sich auch wie folgt charakterisieren:

(i) g ist in $\Gamma_{\text{Abb}}(T^{0,2}X)$ mit g_a ist symmetrisch, positiv definit für alle a und: $\forall U$, $\forall \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathcal{T}(U)$ ist $a \mapsto g_a(\mathfrak{X}_a, \mathfrak{Y}_a) \in C^\infty(U)$

(ii) $(g_U)_{U\subseteq X}$, $U \subseteq X$ offen, ist eine restriktionsverträgliche Familie von positiv definiten, symmetrischen Abbildungen

$$\mathcal{T}(U) \times \mathcal{T}(U) \longrightarrow C^\infty(U).$$

Hierbei heißt positiv definit: $0 \neq \mathfrak{X} \in \mathcal{T}(U) \Rightarrow g_U(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) > 0$.

(iii) g entsteht durch Koordinatenpatching mit positiv definiten, symmetrischen und glatten g_x^φ für alle $x \in V_\varphi$.

Bemerkung

Seien V, W (endlich dimensionale) $\mathbb{R}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann definiert man

$$\sigma_B : V \to W^*, v \mapsto B(v, \cdot) = \{w \mapsto B(v,w)\}$$

bzw. analog $\sigma_B : W \to V^*$.
Sei nun $g : V \times W \to \mathbb{R}$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform, dann ist σ_g ein Isomorphismus.
Ist $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von V, dann heißt $G = ((g(e_i, e_j))_{ij}) = g_{ij}$ die Gram-Matrix

von g. Damit gilt

$$g(v,w) = v^t G w$$

und g ist positiv definit genau dann, wenn G positiv definit ist.
Sei A eine positiv definite Matrix, dann definniert man

$$g_A(v,w) := v^t A w.$$

Ist $W = V^*$, dann ist $\sigma_g : V \to V^*$ ein Isomorphismus und man definiert

$$g^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto g(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y))$$

mit Gram-Matrix $(g^*(e^{*i}, e^{*j}))_{ik}$.

1.1 Lemma

Die Gram-Matrizen (g_{ik}) und $H := (g^{ik})$ sind invers zueinander.

Beweis

Betrachte $E_i := \sigma(e_i)$, dann ist $E_i(v) = g(e_i, v) = v^j g(e_i, e_j) = v^j g_{ij} \Rightarrow E_j = g_{ij} e^{*j}$
$\Rightarrow g^*(E_i, E_j) = g(e_i, e_j) = g_{ij}$, aber ebenso gilt $g^*(g_{ik} e^{*k}, g_{il} e^{*l}) = g_{ik} \underbrace{g^*(e^{*k}, e^{*l})}_{=g^{kl}} g_{il}$, also in Matrizenform $G = GHG \Leftrightarrow GH = I$ und $HG = I \Leftrightarrow G = H^{-1}$. □

1.2 Lemma

Sei g eine positiv definite, symmetrische Bilinearform auf V, dann gibt es eine positiv definite, symmetrische Bilinearform g^{*p} auf $\mathrm{Alt}^p(V) = \Lambda^p V^*$, die die Gleichung

$$g^{*p}(a_1 \wedge \cdots \wedge a_p, b_1 \wedge \cdots \wedge b_p) = \det(g^*(a_i, b_j)_{ij})$$

für $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p \in V^*$ erfüllt. Für $p = 1$ gilt offensichtlich $g^{*1} = g^*$.

Beweis

Wähle eine Orthonormalbasis $\{e_1, ..., e_n\}$ von V bzgl. g, also gilt $g(e_i, e_j) = g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow g = I_n \Rightarrow g^* = I_n^{-1} \Rightarrow \{e^{*1}, ..., e^{*n}\}$ ist eine Orthonormalbasis von V^*.
Definiere g^{*p} als Bilinearform, die zu der Basis e^{*I} mit $|I| = p$ die darstellende Matrix

$I_{\binom{n}{p}}$ hat.
Diese stimmt mit $\det(g^*(\cdot,\cdot))$ auf der Basis überein, also auf ganz $\mathrm{Alt}^p(V)$. □

Bemerkung

Es stimmen sogar die Abbildungen $g^{*p}(\mathrm{alt}(\cdot), \mathrm{alt}(\cdot))$ und $\det(g^*(\cdot,\cdot))$ auf $(V^*)^p \times (V^*)^p$ überein. Es genügt diese Aussage auf den Basisvektoren $\{e^{*i_1}, ..., e^{*i_p}, e^{*j_1}, ..., e^{*j_p}\}$ zu verifizieren. Betrachte dazu

Fall 1:
Es existieren k, l, s.d. $i_k = i_l \Rightarrow \mathrm{alt}(\cdot) = 0$, denn $e^{*i_k} \wedge e^{*i_l} = e^{*i_k} \wedge e^{*i_k} = 0$, und in der Matrix $(g^*(\cdot,\cdot))$ tauchen zwei identische Zeilen auf und damit ist ihre Determinante 0.

Fall 2:
Für alle l, k ist $i_k \neq i_l$, d.h. es brauchen lediglich Permutationen der Indizes betrachtet werden. Zerlegt man jede Permutation in geeignet viele Transpositionen "benachbarter Elemente" sieht man sofort, dass jede Permutation im Wedgeprodukt und in der Determinante lediglich "gleichviele" Vorzeichen -1 verursacht.

Bemerkung

Sei $e_1, ..., e_n$ eine beliebige Basis von (V, g), dann ist $\omega = \sqrt{\det(g_{ik})_{ik}} e^{*1} \wedge \cdots \wedge e^{*n}$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^n(V^*) = \mathrm{Alt}^n(V)$, wobei g_{ik} die Metrik auf V und $\wedge$: $\mathrm{Alt}^p(V) \times \mathrm{Alt}^q(V) \to \mathrm{Alt}^n(V) \cong \mathbb{R}$ bezechnet. Ist g^{ik} die Metrik auf den e^{*i}, dann gilt

$$\sqrt{\det(g_{ik})_{ik}} = \frac{1}{\sqrt{\det(g^{ik})_{ik}}}$$

und

$$g^{*n}(\omega, \omega) = 1 = g^*(-\omega, \omega).$$

Ist M ein Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann will man einen natürlichen Isomorphismus von $\mathbb{R} \to \mathrm{Alt}^n(V), t \mapsto t\omega$ (bzw. $C^\infty(M) \to A^n(M), f \mapsto f\omega$) erhalten.

§2 Der $*$-Operator

Definition

Zwei Basen eines Vektorraums V heißen orientierungsäquivalent, wenn die Determinante der Basiswechselmatrix positiv ist.

Definition

Eine Orientierung auf einem Vektorraum V ist eine Äquivalenzklasse von Basen. V heißt orientiert, nach der Auswahl einer Orientierung, deren Basen dann ebenfalls orientiert heißen.

Bemerkung

Jeder Vektorraum hat genau zwei Orientierungen.

Beispiel

Der $\mathbb{R}^n$ ist mittels der Standardbasis orientiert.

Lemma

Eine Orientierung auf (V, g) induziert eine eindeutige Topform

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ik})_{ik}} e^{*1} \wedge \cdots \wedge e^{*n}.$$

Beweis

Sei A der Basiswechsel von $\{e_i\}$ nach $\{f_j\}$, dann transformiert $\{e^{*i_1} \wedge \cdots \wedge e^{*i_n}\} \to \{f^{*j_1 \wedge \cdots \wedge f^{*j_n}}\}$ kovariant und $\sqrt{\det(g_{ik})_{ik}}$ kontravariant (oder umgekehrt, vermutlich mit $\sqrt{\det^2} A = \det A$).

Definition

Ein lokaler Rahmen auf $U \subseteq M$ bzw. $\mathcal{T}(U)$ ist ein Tupel $(e_1, ..., e_n) \in \mathcal{T}(U)$, s.d.

$$\Phi : (C^\infty(U))^n \to \mathcal{T}(U), f_1, ..., f_n \mapsto f^i E_i$$

ein Isomorphismus von C^∞-Moduln ist.

Beispiel

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf den zugehörigen Karten.

Bemerkung

Sei E_i ein lokahler Rahmen auf U, dann bilden die $E_i(p)$ eine Basis von T_pM für alle $p \in U$.

Bemerkung

Eine Volumenform η auf M ist ein globaler Rahmen von $A^n(M)$, denn

$$\varphi : C^\infty(M) \to A^n(M), f \mapsto f\eta$$

ist ein $C^\infty(M)$-Modulisomorphismus.

Beweis

Es gilt

$$\varphi(f) = f \cdot \varphi(1)$$

und angenommen, dass $\varphi(1)_p = 0$ gälte. Für beliebige $\omega \in A^n(M)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\omega = \varphi(f) = \varphi(1) \cdot f \\
&\Rightarrow\ \omega_p = f(p)\varphi(1)_p = 0 \\
&\Rightarrow\ \forall\, \omega \in A^n(M) : \omega_p = 0\ \lightning.
\end{aligned}$$

Lemma

Eine glatte Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn es eine Familie von Orientierungen $(O_p)_{p\in M}$ der Tagentialräume T_pM gibt, s.d. für alle $U \subseteq M$ offen und alle lokalen Rahmen $E_1, ..., E_n$ auf U gilt

$$\exists\, q \in U :\ \{E_1(q), ..., E_n(q)\} \in O_q\ \Rightarrow\ \forall\, p \in U : \{E_1(p), ..., E_n(p)\} \in O_p.$$

Beweis

"$\Leftarrow$"
Sei $(\nu_p)_{p\in M}$ gegeben und eine Karte $\varphi = x$ um q, dann gilt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \in O_q(T_qM) \text{ oder } \left\{-\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \in O_q(T_qM).$$

Definiere (Œ) die neue Karte $y = (-x^1, x^2, ..., x^n)$, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = -\frac{\partial}{\partial x^1}, \ \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\, i \geq 2$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y^i} \in O_q(T_pM) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y^i} \in O_p(T_pM)$ für alle $p \in U$.
Sei $p = U_y \cap U_z \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}, \left\{\frac{\partial}{\partial z^i}\right\} \in O_p(T_pM) \Rightarrow \det(J(z\circ y^{-1})) > 0$ nach Definition der Vektorraum Orientierung.

"$\Rightarrow$"
Sei M orientiert, dann definiert man in jedem Punkt $p \in M$ $O_p := \left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$.

$\square$

Lemma

Fasst man endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume als Mannigfaltigkeiten, dann stimmen die Orientierungskonzepte überein.

Beweis

Jede Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$ liefert einen Isomorphismus

$$\varphi_B : \mathbb{R}^n \to V, (x^1, ..., x^n) \mapsto x^i b_i.$$

V besitzt also eine Karte φ_B, die V nach $\mathbb{R}^n$ abbildet und somit ist $\{\varphi_B\}$ ein orientierter Atlas.
Ferner existieren (entgegengesetzte) Orientierungen $[\mathcal{A}]_o$ und $[\mathcal{A}^\sigma]_o$, s.d. jede Basis von V in einem $[\mathcal{A}^\sigma]$ liegt. Man identifiziert also Basen mit Atlanten.
$\{a_i\}, \{b_i\} \in [\mathcal{A}]_o \Rightarrow$ Basiswechselabbildung hat positive Determinante $\Rightarrow \{a_i\}, \{b_i\} \in O$.

2.1 Lemma

Sei (V, g) ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt g, dann existiert ein eindeutiger natürlicher Isomorphismus

$$*^p = * : \mathrm{Alt}^p(V) \to \mathrm{Alt}^q(V), \alpha \mapsto *\alpha,$$

der durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert wird:

(i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Alt}^p(V)$ gilt

$$\alpha \wedge *\beta = g^{*p}(\alpha, \beta) \cdot \omega$$

mit ω der Volumenform auf (V, g).

(ii) Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine orientierte Orthoonormalbasis von V, dann gilt:
(a) Für $e^{*I} \in \mathrm{Alt}^p(V)$ und $e^{*J} \in \mathrm{Alt}^q(V)$ ist

$$*(e^{*I}) = \epsilon(I, J) \cdot e^{*J}$$

mit $\epsilon(I, J) = \mathrm{sgn}(\pi)$, wobei π eine Permutation ist, die

$$\pi(\{i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q\}) = \{1, ..., n\}$$

erfüllt ($J = \{1, ..., n\} \setminus I$).
(b) $(*\beta_I) = \epsilon(I, J)\beta_J$

Beweis

(a) $\Rightarrow$ (b)

$$*(\beta) = *(\beta e^{*I}) = \beta_J * e^{*I} \overset{\text{(a)}}{=} \sum_{|I|=p} \beta_I \epsilon(I, J) e^{*J}$$

$$||$$

$$*\beta = (*\beta)_J e^{*J}$$

$\Rightarrow (*\beta)_J = \beta_I \epsilon(I, J)$

(b) $\Rightarrow$ (a)
Sei $\beta_K = \delta^I_K$ für $\beta = \beta_K e^{*K}$

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Wähle $\alpha = e^{*I} \Leftrightarrow e^{*I} \wedge *\beta = g^{*p}(e^{*I}, e^{*J}\beta_J)\omega$ $(*)$
Für die linke Seite gilt:

$$(*\beta)_K \left(e^{*I} \wedge e^{*K}\right) = e^{*I\cup K}(*\beta)_K \;\Leftrightarrow\; (*\beta)_{\{1,\dots,n\}\setminus I}\omega\epsilon(I, \{1, ..., n\} \setminus I)$$

Für die rechte Seite gilt:

$$g^{*p}(e^{*I}, e^{*J}\beta_J)\omega = \delta^{I,J}\beta_J\omega = \beta_I\omega$$

Man erhält also

$$(*\beta)_{\{1,\dots,n\}\setminus I} = \beta_I\epsilon(I, \{1, ..., n\} \setminus I)^{-1} \;\Leftrightarrow\; \text{(ii)(b)}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Nimmt man (b) an, sieht man sofort $\alpha \wedge *\beta = g^{*p}(\alpha, \beta) \cdot \omega$, wegen Gleichung $(*)$.

Existenz
Da V ein endlich dimensionaler Vektorraum und g eine positiv definite, symmetrische Bilinearform ist existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$i^{-1} : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^n(V), t \mapsto t\omega,$$

wobei $\omega := \sqrt{\det(g_{ik})_{ik}}e^{*1} \wedge \dots \wedge e^{*n}$ die Volumenform auf (V, g) ist.
Mit $p + q = n$ erhält man aus i und $\wedge$ den Isomorphismus

$$B_{i\circ\wedge} = i \circ \wedge : \mathrm{Alt}^p(V) \times \mathrm{Alt}^q(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, (\eta, \varphi) \mapsto i(\eta \wedge \varphi).$$

$\Rightarrow$ es existiert ein Isomorphismus

$$\sigma_{B_{i\circ\wedge}} = \sigma_{i\circ\wedge} : \mathrm{Alt}^p(V) \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{Alt}^q(V)\right)^*, \eta \mapsto i(\eta \wedge \cdot).$$

Weiterhin gibt es einen Isomorphismus

$$\sigma_{g^{*q}} : \mathrm{Alt}^q(V) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Alt}^q(V))^* .$$

Es sei angenommen, dass der Sternoperator wie folgt identifizert werden kann

$$*\beta = (\sigma_{g^{*p}}^{-1} \circ \sigma_{i\circ\wedge})(\beta).$$

In der Tat folgt aus dieser Definition

$$\sigma_{g^{*q}}(*\beta) = \sigma_{i\circ\wedge}(\beta) : \mathrm{Alt}^q(V) \to \mathbb{R}.$$

Man wertet nun diese Funktionale an e^{*I} aus:

$$\begin{array}{ccc}
\sigma_{g^{*q}}(*\beta)(e^{*I}) & = & \sigma_{i\circ\wedge}(\beta)(e^{*I}) \\
|| & & || \\
g^{*q}(*\beta, e^{*I}) & & i(\beta \wedge e^{*I}) \\
|| & & || \\
(*\beta)_K g^{*q}(e^{*K}, e^{*I}) & & i(\beta_J e^{*J} \wedge e^{*I}) \\
|| & & || \\
(*\beta)_K \delta^{K,I} & & \epsilon(J,I)\delta^{I,J}\beta_J
\end{array}$$

$\Rightarrow *(\beta)_I = \beta_{\{1,\dots,n\}\setminus I}\,\epsilon(I,J) \Leftrightarrow$ (ii)(b)

Die Isomoprhismeneigenschaft folgt zum Einen aus

$$\dim \mathrm{Alt}^p(V) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \mathrm{Alt}^q(V)$$

und zum Anderen aus $\beta \in \ker \Rightarrow (*\beta)_K = \epsilon(K,I)\beta_I = 0 \;\forall\, K \Rightarrow \beta_I = 0 \;\forall\, I \Rightarrow \beta = 0$

$\square$

Bemerkung

Die Darstellende Matrix des $*$-Operators bzgl. der Orthonormalbasen e^{*I} und e^{*J} ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \epsilon\left(\{1,\dots,p\},\{p+1,\dots,n\}\right) & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon\left(\{n-p,\dots,n\},\{1,\dots,n-p\}\right) \end{pmatrix}.$$

2.2 Lemma

Die ∗-Operatoren haben die Eigenschaften, dass

$$*^{n-p} \circ *^{p} = (-1)^{p(n-p)} \operatorname{id}_{\mathrm{Alt}^p(V)},$$

$$\mathrm{Alt}^p(V) \xrightarrow{*^p} \mathrm{Alt}^{n-p}(V) \xrightarrow{*^{n-p}} \mathrm{Alt}^{n-(n-p)}(V)$$

gilt. Also ist $**$ ein Automorphismus.

Beweis

Benutze die Darstellung

$$\alpha \wedge (*\beta) = g^{*p}(\alpha, \beta)\omega$$

für $\alpha = \beta = e^{*I}$:

$$e^{*I} \wedge (*e^{*I}) = g^{*}(e^{*I}, e^{*I})\omega = \omega.$$

Ferner ist

$$*(*e^{*I}) = *(\epsilon(I,J)e^{*J}) = \underbrace{\epsilon(J,I)\epsilon(I,J)}_{=:\lambda=\lambda^{-1}} e^{*I} = e^{*I}$$

und

$$(**e^{*I}) \wedge (*e^{*I}) = (-1)^{p(n-p)}(*e^{*I}) \wedge (**e^{*I}) = (-1)^{p(n-p)} g^{*n-p}(*e^{*I,*e^{*I}})\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega.$$

Damit gilt

$$\omega = \lambda(**e^{*I}) \wedge (*e^{*I}) = \lambda(-1)^{p(n-p)}\omega.$$

□

Korollar

$*1 = \omega$.

Beweis

$1 \in \mathrm{Alt}^0(V)$, $I = \emptyset$, $J = \{1, ..., n\} \Rightarrow \epsilon(I,J) = 1$.

□

Lemma

Sei $\{e_1, .., e_n\}$ eine beliebige Basis des Vektorraums (V, g), dann gilt für die induzierten Basisvektoren $e^{*I} = e^{*i_1} \wedge \cdots \wedge e^{*i_p}$ von $\mathrm{Alt}^p(V)$:

$$e^{*I} = \sum_{|J|=p} \sqrt{\det(g_{ij})} g^{*p}(e^{*I}, e^{*J}) \cdot \epsilon(J, \{1, ..., n\} \setminus J) \cdot e^{*\{1,...,n\} \setminus J}.$$

§3 de Rham-Laplace-Operator

Bemerkung

Sei X eine orientierte Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann hat man eine Auswahl von orientierten Basen jedes Tangentialraumes und die Form

$$\omega_a = \sqrt{\det(g_{ik})_{ik}} dx_a^1 \wedge \cdots \wedge dx_a^n \in \Lambda^n T_a^* X$$

ist wohldefiniert.
Ferner ist $\omega = \omega_g \in A^n(X)$.

Beweis

Übungsaufgabe.

Definition & Bemerkung

Man hat nun ein Radonmaß

$$f \mapsto \int_X \omega_g \cdot f \text{ für } f \in C_c^0(X).$$

Ferner kann man nun den Raum $L^1(X, \omega_g)$ definieren.
Weiterhin definiert man das Volumen von X mittels

$$\int_X \mathbb{1} \cdot \omega_g =: \operatorname{vol}_g(X).$$

Definition & Bemerkung

Man definiert den $*$-Operator auf p-Formen wie folgt:
Sei $\eta \in A^p(X) \Rightarrow \eta_a \in \operatorname{Alt}^p(T_a X)$
$\Rightarrow (*\eta)_a := *\eta_a$ (punktweise).
$*\eta$ ist glatt nach dem Lemma von Seite 103.

Lemma

Sei $\beta \in \Gamma_{\text{Abb}}(\Lambda^p T^* X)$, dann gilt

$$\beta \in A^p(X) \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in A^p(X) \; \forall \, \alpha \in A^{n-p}(X).$$

Beweis

"$\Rightarrow$"
Klar.
"$\Leftarrow$"
$\beta = \beta_I dx^I \Rightarrow dx^J \wedge \beta = \beta_I dx^J \wedge dx^I = \beta_I \epsilon(I,J)\delta^{I\cup J,\{1,\dots,n\}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \beta_{\{1,\dots,n\}\setminus J}\epsilon(I,J)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \alpha \wedge \beta \in A^n(X)$, also $\alpha \wedge *\eta = g^{*p}(\alpha,\eta)\omega$ glatt $\Rightarrow *\eta$ glatt.

□

3.1 Satz

Der $*$-Operator definiert einen C^∞-linearen Isomorphismus

$$* : A^p(X) \to A^{n-p}(X)$$

mit der Eigenschaft $* * \eta = (-1)^{p(n-p)}\eta$.

Beweis

$* * \eta = (-1)^{p(n-p)}\eta$ ist klar nach Konstruktion.

□

Bemerkung

Sei $1 \in A^0(X) = C^\infty(X)$, dann gilt $*1 = \omega$.

3.2 Definition

Die Kodifferentiation ist die Abbildung

$$\delta := d^* := d^{*^p} := \delta^p := (-1)^{n(p+1)+1} * d^{n-p} * : A^p(X) \to A^{p-1}(X),$$

$$A^p \xrightarrow{*} A^{n-p} \xrightarrow{d^{n-p}} A^{n-(p-1)} \xrightarrow{*} A^{p-1}.$$

Erinnerung

Sei X eine kompakte orientierte Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $\alpha \in A^{n-1}(X)$, dann gilt

$$\int_X d\alpha = 0.$$

Definition

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : A^p(X) \times A^p(X) \to C^\infty(X), (\alpha, \beta) \mapsto g^{*p}(\alpha, \beta).$$

Ist X eine kompakte Mannigfaltigkeit, dann gilt $C_c^\infty(X) = C^\infty(X) \subseteq C_c^0(X) = C^0(X) \subseteq L^1(X)$. Man definiert

$$(\cdot, \cdot) : A^p \times A^p \to \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta) = \int_X g^{*p}(\alpha, \beta)\omega.$$

Man sieht sofort

$$(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega = \int_X \alpha \wedge *\beta.$$

$(\cdot, \cdot)$ ist positiv definite und symmetrische $\mathbb{R}$-Bilinearform, denn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist all das und sogar C^∞-bilinear. Aber $A^p(X)$ hat unendliche Dimension über $\mathbb{R}$.

3.3 Definition

Seien E, F normierte Räume und $A : E \to F$ eine stetige, lineare Abbildung, dann ist die adjungierte Abbildung von A $A^* : F^* \to E^*$ (stetig und linear) charakterisiert durch

$$A^*(\varphi)(v) = \langle v, A^*(\varphi) \rangle_E = \langle A(v), \varphi \rangle_F = \varphi(A(v)) \text{ für } v \in E, \ \varphi \in F^*.$$

Sei H ein Prähilbertraum (vgl. S. 18). Ein linearer Operator $A : H \to H$ heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$ gilt, oder

$$\langle x, Ay \rangle_H = \langle Ax, y \rangle_H \text{ für alle } x, y \in H.$$

Definition

Die $n + 1$-fache orthogonale Summe

$$A^\bullet(X) = \bigoplus\nolimits_{p \in \mathbb{Z}} A^p(X) = \bigoplus\nolimits_{p=0}^{n} A^p(X)$$

ist mit

$$\left(\sum_p \alpha_p, \sum_p \beta_p \right) = \sum_{p=0}^{n} (\alpha_p, \beta_p)_{A^p}$$

ein unendlich dimensionaler Prähilbertraum.

3.4 Satz

Die Kodifferentiation auf einer kompakten orientierten Riemann'schen Mannigfaltigkeit ist die adjungierte Abbildung zur Cartan-Ableitung, d.h.

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta) \text{ für } \alpha \in A^{p-1}(X),\ \beta \in A^p(X).$$

Beweis

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_X d(\alpha \wedge *\beta) = 0$$

und ferner

$$\int_X d(\alpha \wedge *\beta) = \int_X d\alpha \wedge *\beta + \underbrace{(-1)^{p-1}\alpha \wedge (d * \beta)}_{=:\eta}.$$

Für η gilt

$$\begin{aligned}\eta &= (-1)^{p-1+(n-p+1)(n-(n-p+1)+1)}\alpha \wedge *\delta\beta \\ &= (-1)^1 \alpha \wedge *\delta\beta,\end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned}(p-1)(1+n-p+1)(n-(n-p+1))+1 &= (p-1)(n-p+2+n)+2n \\ &= 2n(p-1+1)+2(p-1)-p(p-1) \\ &equiv - p(p-1) \mod 2 \\ &\equiv 0 \mod 2,\end{aligned}$$

also

$$0 = \int_X d\alpha \wedge *\beta - \int_X \alpha \wedge \delta\beta \ \Leftrightarrow\ (d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta).$$

□

Definition

Der de Rham-Laplace-Operator

$$\Delta = \Delta^p = \Delta^p_{dR} : A^p(X) \to A^p(X)$$

ist definiert durch

$$\Delta^p := d^{p-1} \circ \delta^p + \delta^{p+1} \circ d^p = \text{“}(d+\delta)^2\text{“}.$$

Bemerkung

Sei nun (X, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\Delta^0 f = \frac{-1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}).$$

Beweis

Übungsaufgabe.

Ist in obigem Fall zusätzlich g die Standardnorm, “$g = I_n$“, dann ist

$$\Delta^0_{dR} = -\Delta_{std} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} : C^\infty(U) \to C^\infty(U).$$

§4 Hodge-Zerlegung

Definition

Eine Form $\alpha \in A^p(X)$ heißt harmonisch, falls

$$\Delta^p_{dR}\alpha = 0$$

gilt. Der Kern von Δ^p_{dR}, $\ker \Delta^p_{dR}$, wird mit $\mathcal{H}^p(X)$ bezeichnet.

Lemma

Der de Rham-Laplace-Operator

$$\Delta = \bigoplus \Delta^p$$

ist selbstadjungiert, d.h.

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) \;\Leftrightarrow\; (\Delta^p\alpha, \beta)_{A^p} = (\alpha, \Delta^p\beta)_{A^p} \text{ für alle } p.$$

Beweis

$(\Delta\alpha, \beta) = (d\delta\alpha + \delta d\alpha, \beta) = (d\delta\alpha, \beta) + (\delta d\alpha, \beta) = (\delta\alpha, \delta\beta) + (d\alpha, d\beta)$

□

4.1 Satz

Sei X eine orientierte, kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann gilt

$$\Delta\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; d^p\alpha = 0 = \delta^p\alpha.$$

Beweis

"$\Leftarrow$"
$d^p\alpha = 0 = \delta^p\alpha \Rightarrow \Delta\alpha = \delta d\alpha + d\delta\alpha = 0.$
"$\Rightarrow$"
$(\Delta\alpha, \alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \geq 0$ und $(0, \alpha) = 0$
$\Rightarrow (d\alpha, d\alpha) = 0 \Rightarrow d\alpha = 0$, analog $\delta\alpha = 0$.

□

Korollar (Maximums Prinzip)

Jede harmonische 0-Form ist lokal-konstant.

Beweis

$df = 0$.

□

Definition

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $R := C^\infty(\Omega)$. Die Bilder unter dem Einsetzungshomomorphismus L von $R[Y_1, ..., Y_n]$ mit $Y_i \mapsto \frac{\partial}{\partial y^i}$ heißen glatte, lineare Differentialoperatoren.
Sei $L = L(P)$ ein glatter, linearer Differentialoperator, dann hat er die Ordnung $\deg P$.

Beispiel

(i) $P = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2$ mit $L(Y_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, dann ist $L(P) = \Delta$.

(ii) $\Omega = U \times I, I \subseteq \mathbb{R}, U \subseteq \mathbb{R}^n, L(Y_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq n, L(Y_{n+1}) = \frac{\partial}{\partial t}, P = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_{n+1}$, dann ist $L(P) = 0 = \Delta - \frac{\partial}{\partial x^t}$ die Wärmeleitungsgleichung.

(iii) Mit gleichen Vorraussetzungen wie in (ii) ist $Q = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_{n+1}^2$, dann ist $L(Q) = 0 = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial^2 t} =: \Box$ die Wellengleichung.

Definition

Das Symbol von $L(P)$ ist die Funktion

$$\sum_\alpha P_\alpha(x)(i\xi)^\alpha \text{ mit } P = P_\alpha Y^\alpha \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Das Hauptsymbol von $L(P)$ ist die Funktion

$$S(P, x, i\xi) = \sum_{|\alpha| = \deg P} P_\alpha(x)(i\xi)^\alpha \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}).$$

Definition

Ein Differentialoperator $L(P)$ heißt

(i) elliptisch, falls
$S(P, x, i\xi) \neq 0$ für alle $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \Omega$ ($\Leftrightarrow$ keine Nullstelle von S ist reell).

(ii) parabolisch, falls
$S(P, x, i\xi)$ nicht degeneriert ist.

(iii) strikt hyperbolisch, falls
alle Nullstellen von $S(P, x, i\xi)$ reell und verschieden sind.

Bemerkung

Die Nomenklatur stammt von der Klassifizierung von Kegelschnitten der Art

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0.$$

Sie heißen

(i) elliptisch, falls $B^2 - 4AC < 0$.
(ii) parabolisch, falls $B^2 - 4AC = 0$.
(iii) hyperbolisch, falls $B^2 - 4AC > 0$.

Bemerkung

(i) $S(\Delta, i\xi) = (i\xi)^t I_n i\xi = -||\xi||^2 \Rightarrow \Delta$ ist elliptisch.

(ii) $S\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}, i\xi\right) = (i\xi)^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} i\xi \Rightarrow \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ ist parabolisch.

(iii) $S(\Box, i\xi) = (i\xi)^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} i\xi \Rightarrow \Box$ ist strikt hyperbolisch.

Bemerkung

Sei (V, g) endlich dimensional und $A : V \to V$ selbstadjungiert, dann gilt

$$V = \ker A \oplus \operatorname{im} A.$$

Aber: $A^p(X)$ ist unendlich dimensional. Jedoch gibt es eine Möglichkeit eine vergleichbare Zerlegung für Δ_{dR}^p zu finden. Hierfür findet die Theorie elliptischer Differentialoperatoren Verwendung.

Definition

Sei X eine orientierte, Riemann'sche kompakte Mannigfaltigkeit. Angenommen es gälte

$$\Delta\omega = \rho$$

für $\omega \in A^p(X)$ und $\rho \in \Gamma_{\text{Abb}}(\Lambda^p T^* X)$.
Das Dirichlet-Problem (Δ, ρ) hat also die (starke) Lösung ω, dann gilt
$(\Delta\omega, \varphi) = (\omega, \Delta\varphi) = (\rho, \varphi)$ für alle $\varphi \in A^p(X)$.
$\eta \in \overline{A^p(X)}$ heißt schwache Lösung von $\Delta\omega = \rho$, falls

$$(\eta, \Delta\varphi) = (\rho, \varphi) \quad \forall \varphi \in A^p(X)$$

gilt, wobei $\overline{A^p(X)}$ die Vervollständingung von $A^p(X)$ ist, also der "kleinste" Hilbertraum, der $A^p(X)$ enthält. Jede starke Lösung ist also auch eine schwache Lösung.
Definiert man für $\beta \in \overline{A^p(X)}$

$$l_\beta(\cdot) = (\beta, \cdot) : A^p(X) \to \mathbb{R}$$

eine stetige, lineare Abbildung mit

$$|l_\beta(\gamma)| \leq ||\beta|| \cdot ||\gamma||,$$

dann gilt

$$(\eta, \Delta\varphi) = (\rho, \varphi)\ \forall \varphi \in A^p(X) \ \Leftrightarrow \ l_\eta(\Delta\varphi) = (\rho, \varphi)\ \forall \varphi \in A^p(X).$$

Eine Lösung des Dirichtlet-Problems im Distributionssinn ist ein Funktional

$$l : A^p(X) \to \mathbb{R},$$

s.d.

$$l(\Delta\varphi) = (\rho, \varphi)$$

für alle $\varphi \in A^p(X)$.
Jede schwache Lösung induziert also eine Lösung im Distributionssinn.
A priori ist nicht klar, dass es immer ein $\eta \in \overline{A^p(X)}$ gibt, s.d. $l(\cdot) = l_\eta(\cdot)$ und noch viel weniger, dass $\eta \in A^p(X)$.
Die beiden folgenden schweren Theoreme sollen dafür ohne Beweis als Blackboxen dienen.

4.2 Theorem

Sei $\rho \in A^p(X)$ und l eine Lösung im Distributionssinn von (Δ, ρ), dann existiert "doch" ein $\omega \in A^p(X)$ mit $l = l_\omega$.

4.3 Variante des Rellich'schen Einbettungssatz

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A^p(X)$ mit $||\alpha_n|| \leq c$ und $||\Delta\alpha_n|| \leq c$ für ein $c > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert eine Teilfolge $(\alpha_{n_\nu})_{\nu\in N}$, die Cauchy'sch ist.

Korollar

Ist $(\mathcal{H}^p(X))^\perp$ abgeschlossen, dann ist Δ^p_{dR} auf $(\mathcal{H}^p(X))^\perp$ koerzitiv, d.h.

$$\exists\, c > 0 : \; ||\beta||_{A^p} \leq c \cdot ||\Delta\beta||_{A^p} \;\forall \beta \in (\mathcal{H}^p(X))^\perp.$$

Beweis

Angenommen zu jedem c existiert ein $\beta \in (\mathcal{H}^p(X))^\perp$, s.d. $||\beta|| > c \cdot ||\Delta\beta|| \Rightarrow$ es existiert $(\beta_k)_k$, s.d. $||\beta_k|| = 1$ und $||\Delta\beta_k|| < \frac{1}{k} < 1$ für alle k.
Es existiert eine Teilfolge $(\beta_\nu)_\nu$, die Cauchy'sch ist nach dem Rellich'schen Einbettungssatz. D.h.

$$l(\psi) := \lim_{\nu\to\infty} (\beta_\nu, \psi)_{A^p}$$

ist wohldefiniert, denn es gilt

$$|(\beta_\nu, \psi) - (\beta_\mu, \psi)| \leq \underbrace{||\beta_\nu - \beta_\mu||}_{\to 0} \cdot ||\psi||.$$

l ist linear und stetig, denn $|l(\psi)| \leq \underbrace{\lim_{\nu\to\infty} ||\beta_\nu||}_{<\infty} \cdot ||\psi||$.

Es gilt $l(\Delta\varphi) = 0$, denn

$$|(\beta_\nu, \Delta\varphi)| = |(\Delta\beta_\nu, \varphi)| \leq ||\Delta\beta_\nu|| \cdot ||\varphi||.$$

Also ist l eine Lösung im Distributionssinn und aus 4.2 folgt $l_\beta = (\beta, \cdot) = \lim_{\nu\to\infty} (\beta_\nu, \cdot) = l$. Somit gilt

$$(\underbrace{\beta - \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu}_{\in \overline{A^p(X)}}, \psi) = 0 \qquad \forall\, \psi \in A^p(X) \overset{\text{dicht}}{\subseteq} \overline{A^p(X)},$$

wobei $\overline{A^p(X)}$ die Vervollständigung ist, also der "kleinste" Hilbertraum, der $A^p(X)$ enthält. Man schließt nun

$$\beta - \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = 0 \in \overline{A^p(X)}^* = \overline{A^p(X)}.$$

Die Tatsache, dass $0 \in A^p(X) \cap \overline{A^p(X)}$, impliziert

$$\beta = \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu \in A^p(X).$$

Behauptung

$\Delta\beta = 0$ ($\Rightarrow \beta \in \mathcal{H}^p(X)$).

Beweis

$\Delta\beta = \alpha \in A^p(X) \Rightarrow (\Delta\beta, \alpha) = (\alpha, \alpha) = (\beta, \Delta\alpha) = l_\beta(\Delta\alpha) = l(\Delta\alpha) = 0 \Rightarrow$ $\alpha = 0$.

□

Damit gilt

$$\beta \in \mathcal{H}^p(X) \cap (\mathcal{H}^p(X))^\perp = \{0\},$$

was im Widerspruch zu $||\beta|| = \lim_{\nu\to\infty} ||\beta_\nu|| = 1$ steht. □

4.4 Hodge-Zerlegung/ Spektralsatz

Sei X eine orientierte, kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann gilt

$$\begin{aligned} A^p(X) &= \mathcal{H}^p(X) \bigoplus \Delta A^p(X) \\ &= \mathcal{H}^p(X) \bigoplus d\delta A^p(X) \bigoplus \delta d A^p(X) \\ &= \mathcal{H}^p(X) \bigoplus dA^{p-1}(X) \bigoplus \delta A^{p+1}. \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte von Δ^p_{dR} gilt

(i) $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < ...$
(ii) $\lambda_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
(iii) $\dim \mathrm{Eig}(\lambda_i, \Delta^p_{dR}) < \infty$
(iv) $\mathrm{Eig}(\lambda_i, \Delta) \perp \mathrm{Eig}(\lambda_j, \Delta)$, für $\lambda_i \neq \lambda_j$
(v) Ist $p = 0$, dann gilt $L^2(X) = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Eig}(\lambda_k, \Delta^0_{dR})}$

Beweis

(i), (ii) und (iv) verbleiben als Übungsaufgaben.

(iii) Angenommen $\dim \mathrm{Eig}(\lambda_i, \Delta^p_{dR}) = \infty$, dann gibt es eine Folge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, s.d. die α_k ein Orthonormalensystem von $\mathrm{Eig}(\lambda_i, \Delta^p_{dR})$ bilden. Es gilt dann

$$||\alpha_k|| = 1,\ ||\Delta\alpha_k|| = \lambda_i$$

$\overset{4.3}{\Rightarrow}$ es gibt eine Teilfolge $(\alpha_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, die Cauchy'sch ist $\lightning$ zur Eigenschaft ein Orthonormalensystem zu sein, $||\alpha_{k_\nu} - \alpha_{k_\mu}|| = \sqrt{2}$, $\nu \neq \mu$.

(v) Wird in weiterführenden Vorlesungen behandelt und hier nicht vorgeführt.

Noch zu zeigen ist, dass $\Delta A^p(X) = (\mathcal{H}^p(X))^\perp$ (die beiden anderen Zerlegungen verbleiben als Übungsaufgaben).

"$\subseteq$"
Zu zeigen ist, dass $\forall\ \eta \in \mathcal{H}^p(X) = \ker \Delta^p_{dR}$ gilt $(\Delta\omega, \eta) = 0$.
$(\Delta\omega, \eta) = (\omega, \Delta\eta) = 0$.

"$\supseteq$"
Sei $\alpha \in (\mathcal{H}^p(X))^\perp$, dann definiert man

$$l_\alpha : \Delta^p A^p(X) \to \mathbb{R}, \Delta\varphi \mapsto (\alpha, \varphi).$$

l_α ist wohldefiniert, denn $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \Leftrightarrow 0 = \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{H}^p(X) \Leftrightarrow (\varphi_1 - \varphi_2, \alpha) = 0$ da $\alpha \in (\mathcal{H}^p(X))^\perp$.
l_α ist stetig, denn:
Sei $\pi : A^p(X) \to \mathcal{H}^p(X)$ die natürliche Projektion, dann definiert man $\psi := \varphi - \pi(\varphi) \in \mathcal{H}^p(X)^\perp$, da $\pi(...) = 0$. Aus $\Delta\pi(\varphi) = 0$ folgt $\Delta\psi = \Delta\varphi$.

$$|l_\alpha(\Delta\varphi)| = |l_\alpha(\Delta\psi)| = |(\alpha, \psi)| \leq ||\alpha|| \cdot ||\psi|| \leq c \cdot ||\alpha|| \cdot ||\Delta\psi|| = c \cdot ||\alpha|| \cdot ||\Delta\varphi||.$$

Hier geht ein, dass $\operatorname{Eig}(0, \Delta^p_{dR})$ endlich dimensional ist, somit $(\mathcal{H}(X)^p)^\perp$ abgeschlossen ist und daher das obige Korollar anwendbar ist.
Also ist l_α linear und stetig $\overset{\text{Hahn}}{\underset{\text{Banach}}{\Rightarrow}}$ es existiert eine Fortsetzung $\tilde{l}_\alpha : A^p(X) \to \mathbb{R}$, die linear und stetig ist, mit $\tilde{l}_\alpha(\Delta\varphi) = (\alpha, \varphi)$ für alle $\varphi \in A^p(X)$, l_α ist also Lösung im Distributionssinn von $\Delta\omega = \alpha$.
$\overset{4.2}{\Rightarrow} \tilde{l}_\alpha = l_\omega$ mit $\omega \in A^p(X)$, also

$$(\omega, \Delta\varphi) = (\alpha, \varphi) \text{ für alle } \varphi \in A^p(X).$$

Es folgt

$$(\Delta\omega, \varphi) = (\alpha, \varphi) \text{ für alle } \varphi \in A^p(X).$$

Da $A^p(X)$ dicht im Hilbertraum $\overline{A^p(X)}$ liegt, folgt $\Delta\omega = \alpha \Rightarrow \alpha \in \Delta A^p(X)$.

□

KOROLLAR

$\Delta\omega = \alpha$ hat eine Lösung $\Leftrightarrow \alpha \in (\mathcal{H}^p(X))^\perp$.

KOROLLAR

Für $p = 0$ gilt

$$\mathcal{H}^0(X) = \{f \in C^\infty(X) \mid f \text{ ist lokal-kompakt}\},$$

$\Rightarrow \operatorname{Eig}(0, \Delta^0_{dR}) = \mathcal{H}^0$, also insbesondere $\dim \operatorname{Eig}(0, \Delta^0) =$ #Zusammenhangskomponenten.

4.5 Hauptsatz der reellen Hodge-Theorie

Sei X eine orientierte, kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann gilt
(i) $\mathcal{H}^p(X) \cong H^p_{dR}(X, \mathbb{R})$
(ii) $\dim H^p_{dR}(X, \mathbb{R}) < \infty$

Beweis

Sei

$$A^p(X) = \mathcal{H}^p(X) \bigoplus dA^{p-1}(X) \bigoplus \delta A^{p+1}(X)$$

die Hodgezerlegung, betrachte dazu $A^p(X) \cap Z^p(X)$ $(Z^p(X) = \ker d^{p+1})$:

$$\underbrace{Z^p(X) \cap A^p(X)}_{=Z^p, Z^p \subseteq A^p} = \underbrace{\mathcal{H}^p(X) \cap Z^p(X)}_{=\mathcal{H}^p(X), \mathcal{H}^p(X) \subseteq \ker d^p} \bigoplus \underbrace{dA^{p-1} \cap Z^p(X)}_{=B^p(X),\, B^p(X) \subseteq Z^p(X)} \bigoplus \underbrace{\delta A^{p+1} \cap Z^p(X)}_{=\{0\}, \delta A^{p-1} \perp Z^p(X)}$$

$\Rightarrow Z^p = \mathcal{H}^p(X) \oplus B^p \Rightarrow \mathcal{H}^p(X) \cong Z^p / B^p$
$\Rightarrow \dim H^p_{dR}(X, \mathbb{R}) < \infty.$

Definition / Bemerkung

Es gilt also

$$\underbrace{H^p(X, \mathbb{R})}_{\text{Topologie}} \overset{\text{de Rham-Theorem}}{\cong} \underbrace{H^p_{dR}(X, \mathbb{R})}_{\text{Differenzialgeometrie}} \overset{\text{Hodge-Theorem}}{\cong} \underbrace{\mathcal{H}^p(X)}_{\text{Riemann'sche Geometrie}} = \ker(\Delta^p_{dR}, g).$$

Der Rang von $H^p(X, \mathbb{R})$ heißt die p-te Bettizahl

$$b^p(X) = \operatorname{rang} H^p(X, \mathbb{R}) = \dim H^p_{dR}(X, \mathbb{R}).$$

Da jede Mannigfaltigkeit Œ als Riemann'sch angenommen werden kann, kann man die Bettizahlen mittels der Kerne von Δ^p_{dR} berechnet werden.

Bemerkung

Da Δ und $*$ kommutieren induziert $*$ einen Isomorphismus

$$* : \mathcal{H}^p(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{n-p}(X).$$

Es gilt: $\alpha \in \ker(\Delta *) \Leftrightarrow \alpha \in \ker(* \Delta)$ ist, $\Rightarrow b^p = b^{n-p}$.

Definition / Bemerkung

Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $B : V \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann heißt B nicht-ausgeartet, falls

$$\sigma_B : V \to W^*, V \mapsto \{x \mapsto B(v, x)\}$$

ein Isomorphismus ist ($\Rightarrow \dim V = \dim W^* = \dim W$).
Dann ist entsprechend

$$\rho_B : W \to V^*, w \mapsto \{y \mapsto B(y, w)\}$$

ein Isomorphismus, denn $\rho_B(w_1) = \rho_B(w_2)$ impliziert

$$\forall\, y \in V : B(y, w_1 - w_2) = 0.$$

Aber aus $pr_i(z) = z^i \in W^* \cong V$ folgt

$$pr_i(w_1 - w_2) = 0 \quad \forall\, i$$

und schließlich

$$w_1 - w_2 = 0.$$

Bemerkung

Sei X eine kompakte, orientierte, rein dimensionale Mannigfaltigkeit, dann induziert die Bilinearform

$$A : Z^p(X) \times Z^{n-p}(X) \to \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

eine Bilinearform

$$B : H^p(X) \times H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}, ([\alpha], [\beta]) \mapsto A(\alpha, \beta),$$

denn: $\alpha \in B^p(X) \Rightarrow A(\alpha, \beta) = 0 = \int_X d(\gamma \wedge \beta) = \int_X d\gamma \wedge \beta + (-1)^{p-1} \underbrace{\int_X \gamma \wedge d\beta}_{=0},$

$\gamma \in A^{p-1}(X), \alpha = d\gamma$.

4.6 Poincaré-Dualität

Sei X eine rein dimensionale, orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit, dann ist $B : H^p(X) \times H^{n-p}(X) \to \mathbb{R}$ nicht-ausgeartet.
Insbesondere folgt aus X ist zusammenhängend, $1 = b^0(X) = b^n(X)$.

Beweis

Für $\alpha \in \mathcal{H}^p(X)$, $[\alpha] \neq 0$ $(\Rightarrow \alpha \neq 0) \Rightarrow *\alpha \in \mathcal{H}^{n-p}(X)$, σ_B ist injektiv, denn $\sigma_B([\alpha]) = B(\alpha, \cdot)$ ist nicht die Nullform, da $B(\alpha, *\alpha) = \int_X \alpha \wedge *\alpha = (\alpha, \alpha) \neq 0$. Wegen $\mathcal{H}^p(X) \cong \mathcal{H}^{n-p}(X)$ ist σ_B bijektiv.

$\square$

§5 Der euklidische Torus

Definition

Die Menge ${}^{\mathbb{R}^n}\!/\!_{\mathbb{Z}^n}$ heißt der n-dimensionale Torus und wird mit $\mathbb{T}^n$ bezeichnet.

Beispiel

$\mathbb{T}^1 = S^1 = {}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Z}}$.

Bemerkung

(i) Man versieht $\mathbb{T}^n$ mit der von der Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{T}^n$$

induzerten Topologie, d.h. $U \subseteq \mathbb{T}^n$ offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

(ii) $\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-mal}}$. Insbesondere ist damit $\mathbb{T}^n$ nach Tychonoff kompakt.

(iii) Sei $Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n = B^{\infty}_{\frac{1}{2}}(0)$, dann kann π eingeschränkt auf Mengen $U \subseteq v + Q = B^{\infty}_{\frac{1}{2}}(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Die Kartenwechsel sehen loakl aus, wie $\tau(x) = x + q$, $q \in \mathbb{Z}^n$. Man sieht sofort, dass $\mathbb{T}^n$ dadurch orientiert ist ($J(\tau) = \mathrm{id}$).

(v) $\mathcal{T}^{p,q}(\mathbb{T}^n) = \mathcal{T}^{p,q}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}^n} := \{T \in \mathcal{T}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \mid T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \text{ ist } \mathbb{Z}^n \text{ periodisch}\}$

Man verwenddet für Tensoren in $\mathcal{T}^{p,q}(\mathbb{T}^n)$ das gleiche Symbol, wie für ihre "Verwandten" auf $\mathbb{R}^n$.

Definition

Das Paar $(\mathbb{T}^n, g)$ heißt euklidischer Torus, wenn "$g = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$".

Lemma

Für den euklidischen Torus gilt

$$\Delta^p_{dR}(\omega_I dx^I) = \sum_{|I|=p} \Delta^0_{dR}(\omega_I) dx^I$$

$\Rightarrow \Delta^p_{dR}(\omega) = 0 \Leftrightarrow$ für alle I gilt $\Delta^0_{dR}(\omega_I) = 0 \Rightarrow \omega_I$ ist konstant nach Maximumsprinzip
$\Rightarrow H^p_{dR}(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$.

Satz

Die Bettizahlen des euklidischen Torus $\mathbb{T}^n$ sind

$$b^p(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{p}.$$

Insbesondere sieht man hieran die Poincaré-Dualität für $\mathbb{T}^n$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Kapitel 4: Krümmung

§1 Vektorbündel & Zusammenhänge

Definition

Ein Vektorbündel vom Rang k ist ein Tripel (π, E, M) oder $E \xrightarrow{\pi} M$ bestehend aus zwei glatten Mannigfaltigkeiten E und M und einer glatten Surjektion $\pi : E \twoheadrightarrow M$, s.d.

(i) eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von M und Diffeomorphismen

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$$

existieren mit

$$h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^k \Longleftrightarrow \pi = pr_1 \circ h_i.$$

(ii) für $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sind die Diffeomorphismen

$$h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$$

von der Form

$$h_i \circ h_j^{-1}(x, v) = (x, h_{ij}(x) \cdot v),\ x \in M,\ v \in \mathbb{R}^k,$$

wobei $h_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ glatt ist.

Bemerkung

Man hat also ein Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\pi"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, dashed, bend left, "{(id, h_{ij})}"] \arrow[dr, dashed, "pr_1"] & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[l, "h_j"'] \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\pi"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, dashed, "pr_1"] \\
M & & U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung Kapitel 0:.1: Vektorbündel-Diagramm

Wählt man für die U_i gerade Kartenblätter (also $\varphi_i : U_i \to V_i$), dann bekommt man so Karten auf E :

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{h_i} U_i \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{(\varphi_i, \mathrm{id})} V_i \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

Die 2. Eigenschaft der obigen Defintion sagt dann aus, dass sich die 2. Komponente der Punkte auf E linear transformieren:

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : V_j \times \mathbb{R}^k \to V_i \times \mathbb{R}^k, \quad (y, v) \mapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y)\ ,\ h_{ij}(\phi_j^{-1}(y)) \cdot v).$$

In diesem Fall sieht das Diagramm wie folgt aus

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\pi"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, dashed, bend left, "{(id, h_{ij})}"] \arrow[d, "{(\varphi_j, \mathrm{id})}"'] \arrow[dr, dashed, "pr_1"] & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[l, "h_j"'] \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\pi"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, dashed, "pr_1"] \arrow[d, "{(\varphi_i, \mathrm{id})}"] \\
M & \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k & U_i \cap U_j & \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

Abbildung Kapitel 0:.2: Vektorbündel-Diagramm für $U_i = U_\varphi$

Andererseits hat man für Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$ glücklicherweise besonders schöne Karten

$$\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$$

dann ist $h_i = (\varphi_i^{-1}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}) \circ \Psi_i$, vgl. das Tangentialbündel auf Seite 125.

Warum also diese umständliche Definition? Nunja, wir wollen auch die trivialen Vektorbündel betrachten $E := M \times \mathbb{R}^k$.

Wenn klar ist, wie π und M aussehen wird ein Vektorbündel kurz durch E angegeben.

Beispiel

Das Paradebeispiel für ein Vektorbündel ist das Tangentialbündel TM. Wir überdecken M mit (φ_i, U_i), benutzen die bekannten Karten

$$\Phi_i : TU_i \to V_i \times \mathbb{R}^n, \quad (p, v^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \mapsto (\varphi(p), v^1, \ldots, v^n)$$

und erhalten

$$h_{ij}(x) = J(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}, x).$$

Bemerkung

Sind 2 Vektorbündel N, N' (mit Abbildungen $h_{N,i} = (h^1_{N,i}, h^2_{N,i}) : \pi_N^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$) gegeben, so kann man daraus weitere Vektorbündel konstruieren :

1. das Tensorprodukt $N \otimes N'$ mit

$$h_{N \otimes N', i} = (h^1_i, h^2_{N,i} \otimes h^2_{N',i}) : \pi^{-1}_{N \otimes N'}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l.$$

2. das duale Vektorbündel N^*

3. das äusere Vektorbündel $\Lambda^p N$ mit

$$h_{\Lambda^p N, i} = (h^1_{N,i}, \Lambda^p(h^2_{N,i})) : \pi^{-1}_{\Lambda^p N}(U_i) \to U_i \times \Lambda^p \mathbb{R}^k.$$

4. $\det N = \Lambda^k N$ wobei k der Rang von N ist

Lemma

Wendet man die oben beschriebenen Konstruktionen auf das Tangentialbündel TM an, erhält man altbekannte Vektorbündel, d.h. es gilt $(TM)^* = T^*M$ und

$$TM^{\otimes p} \otimes T^*M^{\otimes q} = T^{p,q}M.$$

Ein kurioser Spezialfall ist $TM^{\otimes 0} \otimes T^*M^{\otimes 0} = T^{0,0}M = M \times \mathbb{R}$.

Beispiel

Das Möbiusbündel

$$\mathbb{MB} := {}^{[0,1] \times \mathbb{R}}\big/_{\sim} = {}^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}\big/_{\sim}$$

ist durch die Äquivalenzrelation

$$(t, v) \sim (s, u) \quad \Leftrightarrow \quad t - s \in \mathbb{Z} \ \& \ v = -u$$

gegeben. Es enthält auf natürliche Weise das Möbiusband

$$\mathbb{M} := {}^{[0,1] \times (-1,1)}\big/_{\sim} = {}^{\mathbb{R} \times (-1,1)}\big/_{\sim} = \{(p, v) \in \mathbb{MB} : |v| < 1\}.$$

Der erste Teil der Äquivalenzrelation

$$t \sim s \quad \Leftrightarrow \quad t - s \in \mathbb{Z}$$

definiert gerade die Späre S^1, also haben wir die Vektorbündel-Struktur

$$\pi : \mathbb{MB} \to S^1.$$

Der Kartenwechsel

$$h_{ij} : \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$$

sieht dann wie folgt aus

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} +1, & \text{, falls } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{, falls } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Definition

Ein glatter Schnitt eines Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} M$ ist eine glatte Abbildung

$$s : M \to E,$$

s.d.

$$\mathrm{id}_M = \pi \circ s.$$

Der Raum der glatten Schnitte wird mit $\Gamma(E \xrightarrow{\pi} M) = \Gamma(E) = \mathcal{E}(M)$ bezeichnet.

Bemerkung

Dies stimmt gerade mit der Bezeichnung für glatte Vektorfelder $\Gamma(TM) = \mathcal{T}(M)$ überein, die ja gerade die glatten Schnitte des Tangentialbündels sind.
Die Symbole für verschiedene Topformen hat man hiervon abgeleitet, vgl. $\Gamma_{Abb}(\Lambda^n T^*M)$, $\Gamma_{C^0}(\Lambda^n T^*M)$ und $\Gamma_{C^0_C}(\Lambda^n T^*M)$.

Beispiel

Die Schnitte der trivialen Vektorbündel $M \times \mathbb{R}^k$ sind gerade die Funktionen $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$.

Definition

Ein Zusammenhang oder eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ ist eine Schar von Abbildungen

$$\nabla^U : \mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U), (A, s) \mapsto \nabla_A s,$$

die Restriktions verträglich sind, d.h.

$$\nabla^V_{A|_V} s|_V = (\nabla^U_A s)|_V.$$

Es gilt zusätzlich

(i) C^∞-Linearität in der $\mathcal{T}(U)$-Komponente

$$\nabla_{fA+gB} s = f\nabla_A s + g\nabla_B s \quad \forall\ f, g \in C^\infty(U);$$

(ii) Produktregel

$$\nabla_A(fs) = f \cdot \nabla_A s + \nabla_A(f) \cdot s \quad \forall\ f \in C^\infty(U)$$

mit $\nabla_A f = A(f)$;

(iii) $\mathbb{R}$-Linearität in der $\mathcal{E}(U)$-Komponente

$$\nabla_A(\lambda s + \mu t) = \lambda\nabla_A s + \mu\nabla_A t \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung

Für die $\mathbb{R}$-Linearität in der $\mathcal{E}(U)$-Komponente in der obigen Definition reicht es zu fordern, dass gilt

$$\nabla_A(s+t) = \nabla_A s + \nabla_A t.$$

Denn fasst man λ als konstante Funktion auf, erhält man $\nabla_A \lambda = 0$ und somit auch $\nabla_A(\lambda s) = \lambda \nabla_A s$ wegen der Produktregel.

Bemerkung

Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte und η_i ein lokaler Rahmen für $\Gamma(E)$ auf U, also für alle $s \in \mathcal{E}(U)$ gilt $s = s^i \eta_i$ mit $s^i \in C^\infty(U)$.
Da $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\eta_j)$ in $\mathcal{E}(U)$ liegt, gibt es C^∞-Funktionen Γ^k_{ij}, s.d. gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\eta_j) = \Gamma^k_{ij}\eta_k.$$

Für beliebige Schnitte s und Vektorfelder $A = A^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ folgt also

$$\nabla_A s = \nabla_{A^m \frac{\partial}{\partial x^m}}(s^j \eta_j) = A^m(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}}(\eta_j) \cdot s^j + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}}(s^j) \cdot \eta_j) = A^m(\Gamma^k_{mj}\eta_k s^j + \frac{\partial s^j}{\partial x^m}\eta_j).$$

□

Man will nun Zusammenhänge auf dem Tangentialbündel kosntruiren.

Lemma

Hat man für jede Karte $\varphi : U \to V$ ein n^3-Tupel $(\Gamma^k_{\varphi ij}) = (\Gamma^1_{\varphi 11}, ..., \Gamma^n_{\varphi,n,n})$, s.d. jeweils

$$\frac{\partial \tau^k}{\partial x^j} \cdot \Gamma^j_{\varphi\mu\nu}(x) = \frac{\partial^2 \tau^k}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \tau^i}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \tau^j}{\partial x^\nu} \cdot \Gamma^k_{\psi ij}(\tau(x))$$

für alle Karten ψ mit $\tau = \psi \circ \varphi^{-1}$ gilt, so erhält man durch patching einen Zusammenhang auf dem Tangentialündel TM.

Beweis

Ein Zusammenhang verhält sich unter einem Kartenwechsel $\tau = \psi \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \to V_\psi$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) &= \Gamma^k_{\varphi\mu\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^k_{\varphi\mu\nu}\frac{\partial\tau^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^l}\\
&= \nabla_{\frac{\partial\tau^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^i}}(\frac{\partial\tau^j}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y^j})\\
&= \frac{\partial\tau^i}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\tau^j}{\partial x^\nu}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}(\frac{\partial}{\partial y^j}) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}(\frac{\partial\tau^j}{\partial x^\nu})\cdot\frac{\partial}{\partial y^j}\\
&= \frac{\partial\tau^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tau^j}{\partial x^\nu}\Gamma^m_{\psi ij}\frac{\partial}{\partial y^m} + \frac{\partial^2\tau^j}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial y^j}
\end{aligned}$$

Setze $l = m = j$ (von ganz rechts), dann folgt

$$\Gamma^k_{\varphi\mu\nu}\cdot\frac{\partial\tau^l}{\partial x^k} = \frac{\partial\tau^i}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\tau^j}{\partial x^\nu}\cdot\Gamma^l_{\psi ij} + \frac{\partial^2\tau^l}{\partial x^\mu\partial x^\nu}.$$

□

Bemerkung

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine Karte $\varphi : U \to V$ definiert man die Christoffelsymbole

$$\Gamma^k_{\varphi,i,j} := \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n g^{k\nu}_\varphi\left(\frac{\partial g^\varphi_{i\nu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^\varphi_{\nu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^\varphi_{ij}}{\partial x^\nu}\right),$$

wobei (g^φ_{ij}) die Koordinaten der Metrik bzgl. φ sind.
Wegen dem Lemma von oben ergeben diese Tupel einen Zusammenhang ∇^{LC}. Man nennt ihn den Levi-Civita-Zusammenhang für $g = (g_{ij})$.

Bemerkung

Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM, dann definiert man den dualen Zusammenhang ∇^* auf T^*M mittels

$$(\nabla^*_A(\omega))(B) := A(\omega(B)) - \omega(\nabla_A(B)).$$

Beweis

Es ist noch zu zeigen, dass dieser C^∞-linear von $\mathcal{T}(U)$ nach $C^\infty(U)$ ist.

$$A(\omega(fB)) = A(f\omega(B)) = \omega(B)A(f) + fA(\omega(B)),$$

$$\omega(\nabla_A(fB)) = \omega(B\nabla_A f + A\nabla_A B) = A(f)\omega(B) + f\omega(\nabla_A B).$$

Lemma

Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM, dann kann man

$$\nabla_A^{p,q} : \Gamma(TM) \times \mathcal{T}^{p,q}(U) \to \mathcal{T}^{p,q}(U)$$

mittels

(i) $\nabla_A^{0,0} f = A(f)$
(ii) $\nabla_A^{1,0} = \nabla_A$
(iii) $\nabla_A^{0,1} = \nabla_A^*$
(iv) Restriktionsverträglichkeit
(v) $\mathbb{R}$-Linearität für alle p, q
(vi) Produktregel:

$$\nabla_A^{p_1+p_2,q_1+q_2}(T \otimes S) = T \otimes \nabla^{p_2,q_2} S + \nabla^{p_1,q_1} T \otimes S.$$

eindeutig charakterisieren bzw. definieren.

Beweis

Sei ein Tensor T durch

$$T = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}$$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_A^{p,q} T =& \sum_{I,J} \nabla_A^{p,q} \left(T^I_J \frac{\partial}{\partial x^I} \otimes dx^J \right) = (\nabla_A^{0,0} T^I_J) \cdot \frac{\partial}{\partial x^I} \otimes dx^J + T^I_J \cdot \nabla_A^{p,q} \left(\frac{\partial}{\partial x^I} \otimes dx^J \right) \\
=& A(T^I_J) \cdot \frac{\partial}{\partial x^I} \otimes dx^J \\
&+ T^I_J \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \nabla_A \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q} \\
&+ T^I_J \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes \nabla_A^* \left(dx^{j_l} \right) \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}.
\end{aligned}$$

Der Zusammenhang hängt also nur von $\nabla_A^{0,0}$, ∇_A und ∇_A^* ab. Ma sieht leicht, dass $\nabla_A^{p,q}T$ wieder ein (p,q)-Tensor ist. $\nabla^{p,q}$ ist offensichtlich C^∞-linear in der A-Komponenten und die Produktregel $\nabla_A(fT) = f\nabla_A T + A(f)\cdot T$ ist in der allgemeinen Produktregel enthalten.

□

Definition

Die kovariante Ableitung zum Zusammenhang ∇ wird wie folgt definiert

$$D = D_\nabla^p : \mathcal{T}^{0,p}(M) \to \mathcal{T}^{0,p+1}(M), \omega \mapsto \{(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_{p+1}) \mapsto (\nabla_{\mathfrak{X}_{p+1}}\omega)(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_p)\}.$$

Definition

Tensoren mit $D_\nabla T = 0$ heißen parallel bezüglich ∇.

Lemma

Sei $\omega \in \mathcal{T}^{0,p}(M)$ ein paralleler Tensor, d.h. $D\omega = 0$, dann ist ω durch den Wert an einer einzigen Stelle festgelegt. Zusätzlich gilt $\dim_{\mathbb{R}} \ker(D_\nabla^1) \le \dim M$.

Lemma

Sei (M,g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, dann gibt es einen Zusammenhang ∇ auf dem Tensorbündel TM, für den gilt

(i) ∇ ist torsionsfrei, d.h. $\nabla_A B - \nabla_B A = [A,B] = A\circ B - B\circ A$,

(ii) g ist parallel bzgl. ∇, d.h. $D_\nabla g = 0$.

Der so charakterisierte Zusammenhang ist gerade der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{LC}.

§2 Riemann'sche Krümmung

Definition

Sei ∇ ein Zusammenhang, dann ist

$$\mathcal{R}^\nabla(A,B,C) = \mathcal{R}(A,B,C) = \nabla_A(\nabla_B C) - \nabla_B(\nabla_A C) - \nabla_{[A,B]}C = [\nabla_A, \nabla_B]C - \nabla_{[A,B]}C$$

der Krümmungstensor zu ∇.
Ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang, dann nennt man den Krümmungstensor Riemann'sch.

Bemerkung

$\mathcal{R}^\nabla \in \mathcal{T}^{0,3}(M)$.

Beweis

∇ und ω sind in allen Komponenten $\mathbb{R}$-linear, d.h. es bleibt zu zeigen, dass R^∇ $C^\infty(M)$-homogen ist. Für ω ist das klar und da die Argumentation für A und B analog verläuft wird nur A gezeigt.
irgendwann ...

□

Bemerkung

Durch $\mathcal{R}^\nabla$ wird ein $(0,4)$-Tensor bzw. $(1,3)$-Tensor defineirt:

$$R(A,B,C,D) := g(([\nabla_A, \nabla_B] - \nabla_{[A,B]})C, D) = g(\mathcal{R}(A,B,C), D)$$

oder

$$R(A,B,C,\omega) := \omega(([\nabla_A, \nabla_B] - \nabla_{[A,B]})C) = \omega(\mathcal{R}(A,B,C))$$

auffassen.

Lemma

R^∇ erfüllt die folgenden Gleichungen

(i) $R(A,B,C,D) = -R(B,A,C,D)$,

(ii) $R(A,B,C,D) = -R(A,B,D,C)$,
(iii) $R(A,B,C,D) = R(C,D,A,B)$,
sowie die Bianchiidentität

$$\mathcal{R}(A,B,C) + \mathcal{R}(B,C,A) + \mathcal{R}(C,A,B) = 0.$$

Beweis

E. Freitag: "leicht nachzurechen"...

□

Das folgende Theorem zeigt, wie wichtig die Riemannsche Krümmung ist.

2.1 Theorem

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Krümmung $R^{\nabla^{LC}} = 0$ dann gibt es für jeden Punkt eine Karte $\phi : U \to V$, s.d. $(g_{ij}^{\phi})_{ij} = I_n$ gilt.

Definition

Die Abbildung

$$C_l^k : V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q} \to V^{\otimes p-1} \otimes V^{*\otimes q-1}$$

$$v^1 \otimes \cdots \otimes v^p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^q \mapsto \varphi^k(v^l) v^1 \otimes \cdots \otimes \hat{v^l} \otimes \cdots \otimes v^p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\varphi^k} \otimes \cdots \otimes \varphi^q$$

heißt Tensorverjüngung. Seien $I = \{i_1, ..., i_p\}$ mit $i_k \in \{1, ..., n\}$ und $J = \{j_1, ..., j_q\}$ mit $j_l \in \{1, .., n\}$, dann gilt

$$T_J^I e_I \otimes e^{*J} \mapsto \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p \\ j_1,\dots,j_q \\ m}} T^{i_1,\dots,i_{l-1},m i_{l+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{k-1},m j_{k+1},..,j_q} e_{I\setminus\{k\}} \otimes e^{*J\setminus\{l\}}.$$

Auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten kann man sogar beliebige Tensoren, also rein ko- oder kontravariante, verjüngen.

Beispiel

Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann kann man die Verjüngung als $C_{12}B = \mathrm{Spur}(\sigma_S \circ \sigma_B)$ verstehen. Man kann mit Hilfe der Metrik g

$$B = b_{ij} dx^i \otimes dx^j = b_{ij} dx^i \otimes g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} = b_{ij} g^{kj} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

auch als Element von $T^{1,1}V$ auffassen:
Mit Koordinatendarstellung der Verjüngung erhält man $C_{12}B = \sum_m b_{mj}g^{mj}$.
Mit der gegenseitigen Auswertung erhält man $C_{12}B = b_{ij}g^{kj}dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = b_{ij}g^{kj}\delta_{ik} = b_{ij}g^{kj} = \mathrm{Spur}(B \cdot G^*)$.

Definition

Der Riccitensor zum Zusammenhang ∇ ist der $(0,2)$-Tensor

$$C_{13}R^{\nabla} = \sum g^{ik}R_{ijkl}dx^j \otimes dx^l =: R_{\mathrm{Ric}}.$$

Bemerkung

Es gilt

$$C_{kl}R^{\nabla} = c(k,l)R_{\mathrm{Ric}}$$

mit $c(k,l) \in \{-1,0,1\}$.

Lemma

Sei $\alpha \in A^1(M)$, dann gilt

$$\Delta^1_{dR}\alpha = D^*D\alpha + \mathrm{Ric}(\alpha)$$

und

$$g^*(\Delta\alpha,\alpha) = g^*(D^*D\alpha,\alpha) + \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha).$$

Dabei ist D^* der zu D adjungierte Operator und Ric wie folgt definiert

$$\mathrm{Ric} : A^1(M) \times A^1(M) \to C^{\infty}(M), (\omega,\eta) \mapsto \{p \mapsto R_{\mathrm{Ric}}(g^{ij}\omega, g^{kl}\eta)\}.$$

Beweis

...

□

Bemerkung

Sei (M,g) eine zusammenhängende orientierte Rieman'sche Mannigfaltigkeit mit $H^1(M) = \mathbb{R}^m$, dann zerfällt die Menge der geschlossenen Kurven durch einen Punkt in m Homotopie-Klassen $[\kappa_1], ..., [\kappa_m]$. Jede Homotopie-Klasse "umläuft ihr Loch der Mannigfaltigkeit".

Beispiele sind $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\kappa_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t}$ und ihrer Homotopie-Klasse $[\kappa_1]$. Dieses κ_1 ergibt auch die Homotopie-Klasse $[\kappa_1]$ für S^1.
Bei der Donutglasur umläuft die eine Homotopie-Klasse den Teig und die andere das Fingerloch.
Hat man zwei Kurven γ_1 und γ_2, die x_0 und x_1 verbinden, dann ist

$$\gamma(t) = (\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(2-t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

eine geschlossene Kurve $[0,2] \to M$.
Für geschlossene 1-Formen (in der physik auch konform genannt) hängt das Integral über geschlossene Kurven nur davon ab, wie oft die Kurve um die Löcher herumläuft. Umläuft sie z.B. kein einziges Loch, so kann man die 1-Form ω auf eine "Umgebung" der Kurve einschränken. Diese Umgebung hat keine Löcher! Somit gilt das Lemma von Poincaré und es folgt

$$\int_\alpha \omega = \int_\alpha df = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)dt = f \circ \alpha|_0^1 = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)).$$

Da aber α geschlossen ist gilt $\alpha(1) = \alpha(0)$ und damit

$$\int_\alpha \omega = 0.$$

Für die ursprünglichen Kurven γ_1 und γ_2 gilt

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_\gamma \omega = a_1(\gamma) \int_{\kappa_1} \omega + ... + a_m(\gamma) \int_{\kappa_m} \omega,$$

mit $a_i(\gamma)$ der ganzzahligen Umlaufzahl um das i-te Loch, also das zu κ_i gehörige Loch. Man erhält

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + a_1(\gamma_1 + \gamma_2) \int_{\kappa_1} \omega + ... + a_m(\gamma_1 + \gamma_2) \int_{\kappa_m} \omega.$$

Betrachtet man Vektoren von Integralen, so gilt ähnliches

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 \\ \int_{\gamma_1} \omega_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int_{\gamma_2} \omega_1 + a_1(\gamma_1+\gamma_2) \int_{\kappa_1} \omega_1 + ... + a_m(\gamma_1+\gamma_2) \int_{\kappa_m} \omega_1 \\ \int_{\gamma_2} \omega_2 + a_1(\gamma_1+\gamma_2) \int_{\kappa_1} \omega_2 + ... + a_m(\gamma_1+\gamma_2) \int_{\kappa_m} \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_{\gamma_2} \omega_1 \\ \int_{\gamma_2} \omega_2 \end{pmatrix} + \underbrace{a_1(\gamma_1+\gamma_2)}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \int_{\kappa_1} \omega_1 \\ \int_{\kappa_1} \omega_2 \end{pmatrix}}_{=:L(\kappa_1,\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}} +... + \underbrace{a_m(\gamma_1+\gamma_2)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{\begin{pmatrix} \int_{\kappa_1} \omega_1 \\ \int_{\kappa_2} \omega_2 \end{pmatrix}}_{=:L(\kappa_m,\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}} .
\end{aligned}$$

Die Integrale unterscheiden sich also nur um diskrete Werte!

□

2.2 Theorem

Sei (M,g) eine zusammenhängende, orientierte, kompakte Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension n, dann gilt:

(i) $\mathrm{Ric} > 0 \Rightarrow H^1_{dR}(M) = 0$

(ii) $\mathrm{Ric} \geq 0 \Rightarrow \dim H^1_{dR}(M) \leq n$

(iii) $\mathrm{Ric} \geq 0$ und $\dim H^1_{dR}(M) = n \Rightarrow (M,g)$ ist isometrisch zu einem flachen Torus $(\mathbb{T}^n, g)$.

Beweis

Sei $\alpha \in A^1(M)$ dann gilt wegen dem Lemma

$$g^*(\Delta\alpha,\alpha) = g^*(D^*D\alpha,\alpha) + \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha).$$

Integrieren liefert

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha,\alpha) &= \int_M g^*(\Delta\alpha,\alpha)\omega_g = \int_M g^*(D^*D\alpha,\alpha)\omega_g + \int_M \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha)\omega_g \\
&= \underbrace{(D^*D\alpha,\alpha)}_{=(D\alpha,D\alpha)\geq 0} + \int_M \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha)\omega_g \geq \int_M \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha)\omega_g.
\end{aligned}$$

Damit kann man sich den 3 Aussagen widmen.

(i) $\alpha \neq 0$ und $\mathrm{Ric} > 0 \Rightarrow (\Delta\alpha,\alpha) > 0$
Für harmonische α gilt aber $\Delta\alpha = 0 \Rightarrow (\Delta\alpha,\alpha) = 0$.
Also ist $\{0\} = \ker(\Delta^1_{dR}) = H^1_{dR}(M)$.

(ii) $\mathrm{Ric} \geq 0 \Rightarrow (\Delta\alpha > 0 \Leftrightarrow D\alpha = 0) \Rightarrow \dim H^1_{dR}(M) = \dim\ker D \leq n$

(iii) $\mathrm{Ric} \geq 0$ und $\dim H^1_{dR}(M) = n$. Aus letzterem folgt:
$\exists\ \alpha_1, ..., \alpha_n$ harmonisch und $\mathbb{R}$-linear unabhängig.
Darüberhinaus zerfällt die Menge der geschlossenen Kurven durch ein fixiertes x_0 in die Homotopie-Klassen $[\kappa_1], ..., [\kappa_n]$. Verbindet man x_0 mit einem beliebigen x mittels zwei Kurven, dann gilt

$$\begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \alpha_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_1} \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_2} \alpha_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_2} \alpha_n \end{pmatrix} + a_1(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot L(\kappa_1, \alpha_1, ..., \alpha_n) + ... + a_m(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot L(\kappa_n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$$

Man definiert nun das Gitter

$$\begin{aligned} L &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = a_1 \cdot L(\kappa_1, \alpha_1, ..., \alpha_n) + ... + a_m \cdot L(\kappa_n, \alpha_1, ..., \alpha_n), a_i \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \cdot L(\kappa_1, \alpha_1, ..., \alpha_n) + ... + \mathbb{Z} \cdot L(\kappa_n, \alpha_1, ..., \alpha_n) \cong \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\left(\int_{\gamma_1} \alpha_1, ..., \int_{\gamma_1} \alpha_n \right) - \left(\int_{\gamma_2} \alpha_1, ..., \int_{\gamma_2} \alpha_n \right) \in L$$

und die Abel-Jacobi-Abbildung

$$\mathrm{Ab} : M \to {}^{\mathbb{R}^n}\!\big/_{L}, \quad x \mapsto \left(\int_{x_0}^{x} \alpha_1, ..., \int_{x_0}^{x} \alpha_n \right)$$

ist wohldefiniert. Ab ist ein lokaler Diffeomorphismus, denn die Matrix

$$J(\mathrm{Ab}, x) = (\alpha_1(x), ..., \alpha_n(x))$$

hat Rang n, da die α_i $\mathbb{R}$-linear unabhängig gewählt waren. Da nun sowohl M, als auch ${}^{\mathbb{R}^n}\!\big/_{L}$ kompakt sind und Ab surjektiv ist folgt aus der Überlagerungstheorie, dass Ab sogar ein globaler Diffeomorphismus ist.

$\square$