**Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten** **SS 2014** **Blatt 10**
**Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu**
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 18.7.2014, vor der Vorlesung

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | |

**Aufgabe 1 (Eigenwerte des de Rham-Laplace Operators, 1+1+2=4 Punkte)**
Sei $X$ eine orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Sei $\lambda$ ein Eigenwert des de Rham-Laplace Operators $\Delta^p_{dR}$, es existiert also eine $p$-Form $\alpha$ für die gilt $\Delta^p_{dR}\ \alpha = \lambda \cdot \alpha$. **Bitte zeigen Sie**, dass $\lambda \geq 0$ gilt.

b) Wir bezeichnen mit $Eig(\lambda, \Delta^p_{dR}) = \left\{\alpha \in A^p(X) : \Delta^p_{dR}\ \alpha = \lambda \cdot \alpha\right\}$ den Eigenraum von $\lambda$ für $\Delta^p_{dR}$. **Bitte zeigen Sie**, dass $Eig(\lambda_i, \Delta^p_{dR})$ und $Eig(\lambda_j, \Delta^p_{dR})$ genau dann senkrecht aufeinander bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)$ stehen, falls gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass die Folge der paarweise verschiedenen Eigenwerte des de Rham-Laplace Operators $\Delta^p_{dR}$ $(\lambda_k)_k$ unbeschränkt ist.
**Hinweis**: Wir haben etwas änhliches in Vorlesung bewiesen, was auch im Warner oder Godoy(`http://www.uib.no/filearchive/noteshodge27sep.pdf`) zu finden ist.

**Aufgabe 2 (Sternoperator-Allerlei, 1,5+0,5+1+1+1 =5 Punkte)**

a) Sei $(V, g)$ ein euklidischer Vektorraum mit einer beliebigen Basis $e_1, \ldots, e_n$. Sei $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$ weiterhin die duale Basis bezüglichdern symbols), then you can use the following se $g$. **Bitte zeigen Sie**, dass

$$*e^{*I} = \sum_{|J|=p} \sqrt{|g|} \cdot g^{*p}(e^{*I}, e^{*J}) \cdot \epsilon(J, \{1, \ldots, n\} \setminus J) \cdot e^{*\{1,\ldots,n\}\setminus J}$$

für $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ und jeweils $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ gilt.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator für 0-Formen gilt $\Delta^0_{dR} = \delta^1 \circ d^0$, hierbei bezeichnet $\delta^1$ die erste Kodifferentiation .

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator für 0-Formen auf offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$s, gilt

$$\Delta^0_{dR} f = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

d) **Bitte zeigen Sie**, dass für glatte $p$-Formen $\alpha$ und $\beta$ auch die Funktion $g^{*p}(\alpha, \beta)$ glatt ist.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator $\Delta_{dR}$ mit dem Sternoperator $*$ kommutiert, d.h. $\Delta^{n-p}_{dR}\ * = *\ \Delta^p_{dR}$.

**Aufgabe 3 (Hodge-Zerlegung, 0,5+1+0,5+1=3 Punkte)**

a) **Bitte zeigen Sie**, dass $\delta^p \circ \delta^{p+1} = 0$ gilt für alle $p$.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Räume $\delta^{p+1}(A^{p+1})$, $d^{p-1}(A^{p-1})$ und $\mathcal{H}^p = \ker \Delta^p_{dR}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass die Räume $d^{p-1}\delta^p(A^p)$, $\delta^{p+1}d^p(A^p)$ und $\mathcal{H}^p = \ker \Delta^p_{dR}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

d) **Bitte zeigen Sie**, die im folgenden Gleichungssystem das 3. und 4. Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned} A^p(X) = A^p &= \mathcal{H}^p \oplus \Delta^p_{dR} A^p \\ &= \mathcal{H}^p \oplus d^{p-1}\delta^p(A^p) \oplus \delta^{p+1}d^p(A^p) \\ &= \mathcal{H}^p \oplus \delta^{p+1}(A^{p+1}) \oplus d^{p-1}(A^{p-1}) \end{aligned}$$