Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 4.7.2014, 11 Uhr

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1 (Metrik-Konstruktion, 3 Punkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit dann existiert auf M eine Metrik g.
Bemerkung: In der Vorlesung wurde schon ein globaler Tensor konstruiert.

Aufgabe 2 (Metrik-Anwendungen, 1+1+1+1=4 Punkte)
Sei (M, g) eine Riemmansche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \to M$ eine stückweise glatte Kurve, dann definieren wir

$$l_g(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt.$$

a) Sei $\phi : J \to I$ ein Diffeomorphismus mit $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in J$. **Bitte zeigen Sie**, dass dann $l_g(\gamma) = l_g(\gamma \circ \phi)$ gilt.

Wir betrachten nun $\mathbb{H} := \left\{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Darauf gibt es die Metriken $g_{std} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$.

b) **Bitte berechnen Sie** $l_{g_{std}}$ und l_h für die Kurven

$$\begin{array}{rccc} \alpha_n : & (1, n) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (a, t), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta_n : & (\frac{1}{n}, 1) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (a, t). \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \gamma_m : & (-m, m) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (t, b). \end{array}$$

c) **Bitte berechnen Sie** $l_{g_{std}}$ und l_h für die Kurve

$$\begin{array}{rccc} \delta_k : & (\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\pi) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t). \end{array}$$

d) Sei (M, g) wieder eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{X}$ ein Vektorfeld. **Bitte zeigen Sie**, dass $\omega = g(\mathfrak{X}, \cdot)$ ein Differential ist und **geben Sie bitte** ω in lokalen Koordinaten an.

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 3 ((Ko-)Tangentialbündel, 1+1+1+1+1+1=6 Punkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist ihr Tangentialbündel definiert durch

$$TM = \{(p,v) : v \in T_pM\}.$$

Die durch eine Karte $\phi : U \longrightarrow V$ auf M induzierte Karte Φ auf TM ist von der Form

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & TU & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^n, \\ & (p, v = v^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) & \longmapsto & (\phi(p), v^1, \ldots, v^n), \end{array}$$

wobei $(x^1, \ldots x^n)$ die Koordinaten in V sind. Dadurch wird TM eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass TM eine glatte und orientierte Mannigfaltigkeit ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass M eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von TM ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für eine glatte Abbildung $g; TM \to TN$ die Aussage

$$\frac{\partial g}{\partial \frac{\partial}{\partial x^i}} = 0 \quad \forall\ i \tag{1}$$

wohldefiniert ist.

d) Was bedeutet Gleichung 1 ?

e) Wir betrachten nun die glatten Mannigfaltigkeiten M und $X = T^*M$. **Bitte zeigen Sie**, dass $T_{(a,\omega)}X \cong T_aM \times T_a^*M$ gilt.

f) Wie sieht die von $\phi : U \to V$ auf TX induzierte Karte aus?