Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 8**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 27.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Maßtheorie, 0,5+1+1+2+1+1+0,5=7 Punkte)
Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis der Topologie.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass $h \equiv \infty$ in $\mathcal{B}^+(X)$ liegt.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|_1 : & \mathrm{Abb}(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \infty \\ & f & \longmapsto & \inf\{I(h) : h \in \mathcal{B}^+(X) : h \geq |f|\} \end{array}$$

die folgenden Eigenschaft hat

$$\|C \cdot f\|_1 = |C| \cdot \|f\|_1 , \quad 0 \leq \|f\|_1 , \quad \text{und} \quad \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

c) **Bitte zeigen Sie**, dass das Dirac-Maß δ_0 ein Radon-Maß ist.

d) **Bitte zeigen Sie**, dass $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum ist.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass es eine injektive lineare Abbildung $\iota : C^0_C(X) \to \mathcal{L}^\infty, f \mapsto f$ gibt.

f) **Bitte zeigen oder widerlegen Sie**, dass $\iota : \left(C^0_C(X), \|\cdot\|_1\right) \longrightarrow (\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

g) **Bitte zeigen oder widerlegen Sie**, dass $\iota : \left(C^0_C(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \longrightarrow (\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

Aufgabe 2 (Satz von Gauß, 1+1+2 Punkte)
Sei Y eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Kodimension 1. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\mathrm{supp}(f) \subset U_\phi \subset Y$. Wir haben also eine Karte $\phi : U_\phi \to V_\phi$. Dann definieren wir das Oberflächenintegral von f auf Y mittels

$$\int_Y f \, \mathrm{d}S := \int_{V_\phi} f(\phi^{-1}(y^1, \ldots, y^{n-1})) \left\| \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1} \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}} \right\| \mu^{n-1}_{Leb}.$$

Hierbei kann man das Kreuzprodukt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ mittels

$$\det \begin{pmatrix} v^1_1 & \cdots & v^n_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1_{n-1} & \cdots & v^n_{n-1} \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

„berechnen“, wobei die $\mathbf{e}_i$ die Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass das so definierte Oberflächenintegral nicht von der Karte mit $\operatorname{supp}(f) \subset U_\psi \subset Y$ abhängt.

Für eine glatte Funktion $f \in C_C^\infty(Y)$ wird das Oberflächenintegral von f auf Y mittels

$$\int_Y f \, \mathrm{d}S := \sum_{i=1}^{N} \int_{V_\phi} (\eta_i \cdot f)(\phi^{-1}(y^1, \ldots, y^{n-1})) \left\| \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1} \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}} \right\| \mu_{Leb}^{n-1}$$

definiert, wobei $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ eine Partition der Eins für den Träger von f ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass das so definierte Oberflächenintegral nicht von der gewählten Partition der Eins abhängt.
Bemerkung: Wir haben somit gezeigt bzw. können analog zeigen, dass auch das Integral von Topformen wohldefiniert ist.

Der Satz von Gauß besagt folgendes: Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Abschnluss und glatten Rand $\partial\Omega$. Sei F eine glatte Funktion $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar{\Omega} \subset W \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \; \mu_{Leb}^n = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}S,$$

wobei ν das von Blatt 7 bekannte Normalenfeld auf $\partial\Omega$ ist. Für dieses gilt

$$\nu_{\phi^{-1}(x)} = \lambda(x) \cdot \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1}(x) \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}}(x)$$

mit $\lambda(x) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

c) **Bitte beweisen Sie** den Satz von Gauß mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3 (Kohomologie, 1+1+2 =4 Punkte)
Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \int_X : & H^n(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [\omega] & \longmapsto & \int_X \omega \end{array}$$

wohldefiniert und linear ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass $H^n(X, \mathbb{R})$ nicht 0 ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für die 1. Kohomologiegruppe der 1-Sphäre $H^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \Phi^1 : & A^1(S^1) & \longrightarrow & A^1(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} = \left\{ \eta = \eta_1 dx^1 \in A^1(\mathbb{R}) : \eta_1(x+k) = \eta_1(x) \ \forall \ k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \omega = \omega_1(p) \cdot d\theta|_p & \longmapsto & \omega_1(\exp(2\pi i \cdot x)) \cdot dx \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Ebenso gibt es den Isomorphismus $\Phi^0 : A^0(S^1) \to A^0(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ und es gilt $d^0_{\mathbb{R}} \circ \Phi^0 = \Phi^1 \circ d^0_{S^1}$ (alles ohne Beweis) . Betrachten Sie für ω in $\ker\left(\int_X\right)$ die Funktion

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^x \omega_1(\exp(2\pi i t)) \; dt. \end{array}$$