Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 7**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 20.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1 (Orientierung, 1+2+1+1 +2+2+2=11 Punkte+1+2 Bonuspunkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für ein Tensorfeld $T \in \mathcal{T}^{p,q}(M)$ und einen Punkt $a \in M$ die Aussagen $T_a = 0$ bzw. $T_a \neq 0$ wohldefiniert sind.

Bonus) Für welche p, q gilt $\mathbb{R}^{\otimes n^2 pq} \subset \mathcal{T}^{p,q}(M)$?

Eine σ-kompakte [1] glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist genau dann orientiert, falls es eine nirgends verschwindende n-Form $\omega \in A^n(M)$ gibt. Wir werden nun die Rückrichtung der Äquivalenz zeigen und dann anschließend mittels dieser Topformen Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten testen.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass man jeden Atlas $\mathcal{A} = \{(\phi, U_\phi)\}$ mit Hilfe von ω „orientieren“ kann. D.h. es gibt einen Atlas $\mathcal{A}^\omega$, so dass ω von der Form

$$(\phi^{-1})^*\omega = \omega^\phi_{1\dots n}(x) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

mit $\omega^\phi_{1\dots n}(x) > 0 \; \forall \, x \in V_\phi$ für beliebige Karten ϕ in $\mathcal{A}^\omega$ ist. **Bitte zeigen Sie**, darüberhinaus dass $\mathcal{A}^\omega$ orientiert ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass aus der Existenz von ω folgt $C^\infty(M) \cong A^n(X)$.

c+) **Bitte zeigen Sie**, dass aus der Isomorphie $C^\infty(M) \cong A^n(X)$ die Existenz von ω folgt.

d) Sei nun Y eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Kodimension 1. Wir definieren den Normalenraum N_pY für $p \in Y$ durch die Bedingungen $T_p\mathbb{R}^n = N_pY \oplus T_pY$ und $N_pY \perp T_pY$. **Bitte zeigen Sie**, dass auf einer Karte (ϕ, U_ϕ) von Y eine glatte Abbildung $\nu^\phi : U_\phi \longrightarrow \mathbb{R}^n$ existiert für die in allen Punkten $p \in U_\phi \subset Y$ gilt $\nu^\phi_p \in N_pY \subset \mathbb{R}^n$ und $\left\|\nu^\phi_p\right\| = 1$.

Bonus) **Bitte zeigen Sie**, dass falls Y orientiert ist dann existiert eine glatte Abbildung $\nu : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die auf jedem U_ϕ mit der Abbildung ν^ϕ aus Teil d) übereinstimmt.

e) **Bitte zeigen Sie**, falls solch ein Vektorfeld ν auf ganz Y existiert, dann ist Y orientierbar.

---

[1] M ist σ-kompakt, falls M gleich einer abzählbaren Vereinigung kompakter Teilräume ist. Dies wird aber nur für die Hinrichtung benötigt.

f) Das Möbiusband $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ besitzt die Karten

$$\begin{array}{rccl} \phi: & (0,2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{M} \setminus \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \{0\} \times \{0\}, \\ & (\theta, r) & \longmapsto & \left(\left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\theta, \left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\theta, r \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} \psi: & (\pi,3\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{M} \setminus \{-1\} \times \{0\} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ & (\theta, r) & \longmapsto & \left(\left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\theta, \left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\theta, r \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right). \end{array}$$

Bitte zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{M}$ kein Vektorfeld ν wie oben existiert.

Aufgabe 2 (Orientierung mittels Karten, 2+2 Punkte)

a) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\partial\Omega$ ein glatter Rand. Für einen Punkt p auf dem Rand wählen wir 2 Karten ϕ und ψ, die offene Teilmengen von M nach $\mathbb{R}^n$ abbilden. Wir bezeichnen ihre Kartenwechselabbildung mit $\tau = \psi \circ \phi^{-1}$. Für die Orientierbarkeit des Randes müssen wir die Jacobi-Determinante von

$$\vartheta(x^1, \ldots, x^{n-1}) = pr_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)$$

berechnen. **Bitte zeigen Sie**, dass

$$\mathrm{Jac}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathrm{Jac}(\vartheta) & * \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $c > 0$ gilt.

Hinweis 1: Warum darf man oBdA annehmen, dass gilt $\phi(p) = 0$, $\psi(p) = 0$ und dass weiterhin $B_1(0)$ im Definitionsbereich von τ liegt?

Hinweis 2: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für das Landau-Symbol $o(\|x - x_0\|) = \epsilon(\|x - x_0\|) \cdot \|x - x_0\|$ gilt. Hierbei hat $\epsilon(\|x - x_0\|)$ die Eigenschaft, dass $\epsilon(t) \to 0$ für $t \to 0$ (wieder ohne Beweis verwendbar).

b) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, die einen Atlas mit 2 Karten ϕ und ψ besitzt, für die also gilt $M = U_\phi \cup U_\psi$. **Bitte zeigen Sie**, dass falls $U_\phi \cap U_\psi$ zusammenhängend ist, dann ist M orientierbar.