Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2014 Blatt 6

Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html

Abgabe: bis Freitag, 13.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Kohomolgie, 1+2+1+2+1=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einige Eigenschaften der Kohomolgie nachrechnen. Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten X und Y.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass der Pullback f^* (Ko-)Zykel auf (Ko-)Zykel und (Ko-)Ränder auf (Ko-)Ränder abbildet, d.h. es gilt

$$f^*(B^p(Y)) \subset B^p(X) \text{ und } f^*(Z^p(Y)) \subset Z^p(X).$$

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} H^p(f): & H^p(Y) & \longrightarrow & H^p(X), \\ & [\omega] & \longmapsto & [f^*\omega] \end{array}$$

wohldefiniert und linear ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass $H^p(id_X) = id_{H^p(X)}$ gilt. Sei $g : Y \longrightarrow Z$ eine weitere glatte Abbildung, **bitte zeigen Sie**, dass dann $H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g)$ gilt.

d) **Bitte widerlegen oder zeigen Sie** die beiden folgenden Aussagen:

1. $f \in \text{Diff}(X, Y)$ impliziert, dass $H^p(f)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen sind.
2. Sind $H^p(f)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen, dann ist f ein Diffeomorphismus.

e) Diffeomorphismen lassen sich auch wie folgt charakterisieren : Ist

$$T_a f : T_a X \longrightarrow T_{f(a)} Y$$

ein Isomorphismus, so existieren Umgebungen U und W von a bzw. $f(a)$, so dass f in $\text{Diff}(U, W)$ liegt. **Bitte zeigen Sie dies!**

Aufgabe 2 (Tensorprodukte, 2 Punkte)
$\mathcal{T}^*(U)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aber auch eine $C^\infty(U)$-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}^{(0,2)}(U)$ die Menge der Tensorfelder vom Typ $(0,2)$. **Begründen Sie bitte**, mit welchem der beiden Tensorprodukt $\mathcal{T}^{(0,2)}(U)$ identifiziert werden kann

1. $\mathcal{T}^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{T}^*(U)$
2. $\mathcal{T}^*(U) \otimes_{C^\infty(U)} \mathcal{T}^*(U)$.

Aufgabe 3 (Orientierung, 1+3 Punkte + 1 Bonuspunkt)

a) **Bitte zeigen Sie**, dass eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit X entweder 0 oder mindestens 2 Orientierungen hat.

b) Seien $[\mathcal{A}] = \{(\phi, U_\phi)\}$ und $[\mathcal{B}]$ die Orientierungen aus Teil a). Sei $[\mathcal{C}] = \{(\psi, U_\psi)\}$ eine weitere Orientierung. **Bitte zeigen Sie**, dass dann gilt $[\mathcal{A}] = [\mathcal{C}]$ oder $[\mathcal{B}] = [\mathcal{C}]$.

Hinweis Betrachten Sie die Mengen $X_+ = \big\{a \in X : \exists\ \phi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{C} : \det(\mathrm{Jac}(\phi \circ \psi^{-1}) > 0\big\}$ und $X_- = \big\{a \in X : \exists\ \phi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{C} : \det(\mathrm{Jac}(\phi \circ \psi^{-1}) < 0\big\}$

Bonus) **Bitte geben Sie an**, wie viele Orientierungen eine beliebige Mannigfaltigkeit hat.