Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 5**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 6.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Wedge-Produkt und Cartan-Ableitung, 2+2+1,5+1+0,5=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einige Eigenschaften der Cartan-Ableitung nachrechnen. Vermutlich ist ihre Definition über lokale Koordinaten am besten für diese Aufgabe.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für $\alpha \in A^p(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in A^q(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \cdot \beta \wedge \alpha.$$

Hinweis: Zeigen Sie zu erst $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass für $\alpha \in A^p(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in A^q(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \cdot \alpha \wedge (d\beta).$$

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle p gilt $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

d) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle f in $C^\infty(U)$ mit U offen in $\mathbb{R}^n$ gilt $d^1(f \cdot d^0(f)) = 0$.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass für die Projektion $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ die Gleichheit des Basisvektors von T^*M dx^i und der Cartan-Ableitung eben dieser Projektion $d^0(x^i)$ gilt, also $dx^i = d^0(x^i)$.

Aufgabe 2 (Pullbacks, 2+3+1+1=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir den Pullback glatter Differentiale und Tensoren betrachten. Dafür definieren wir

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times \mathbb{R}, \\ & (r, \phi, h) & \longmapsto & (r\cos(\phi), r\sin(\phi), h) \end{array}$$

a) **Bitte zeigen Sie**, dass γ ein (lokaler) Diffeomorphismus ist.

b) **Bitte berechnen Sie**, den Pullback entlang γ für

- $\omega := (x + z) \cdot dx \wedge dy - xy\ dx \wedge dz + dy \wedge dz$
- $\eta := dx \otimes dx \otimes dx \otimes dx$
- $dy \wedge dy$

c) Definieren wir nun $f(x, y, z) := x^2 + y^2$. **Berechnen Sie jetzt** $\gamma^*(f \cdot \omega)$ und $\gamma^*(f \cdot \eta)$.

d) Definieren wir nun $\beta(r, \phi) := \gamma(r, \phi, \sqrt{5})$. **Berechnen Sie jetzt** $\beta^*\omega$.

Aufgabe 3 (Kurvenintegral, 2 Punkte)
Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \longrightarrow X$ eine glatte Kurve. Das Kurvenintegral einer 1-Form entlang γ haben wir definiert als

$$\int_\gamma \omega := \int_I \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

Sei $\phi : U_\phi \longrightarrow V_\phi$ eine Karte auf X mit $\gamma(I) \subset U_\phi$, dann schlagen die Skripten vor das Integral wie folgt zu berechnen

$$\int_\gamma \omega = \int_I \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_I \sum_{i=1}^n \omega_i^\phi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')_\phi^i(t)\ dt.$$

Hierbei sind ω_i^ϕ und $(\gamma')_\phi^i$ die lokalen Koordinaten bezüglich ϕ. Dies sollte aber unabhängig von der Wahl der Karte sein. Sei nun $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ eine Karte auf X mit $\gamma(I) \subset U_\psi$.
Bitte beweisen Sie deshalb die Gleichheit der Funktionen

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^\phi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')_\phi^i(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j^\psi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')_\psi^j(t).$$

Hinweis: Mittels Ko- und Kontravarianz sollte dies leicht möglich sein.