Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 4**

Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 30.5.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Pullback, 1+2+2+1 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass der Pullback glatte Differentiale auf eben solche schickt.
Seien X und Y glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \longrightarrow Y$ eine glatte Abbildung. Sei a ein beliebiger Punkt in X und $\phi : U \longrightarrow V$ eine Karte mit $a \in U$. Seien $(x^1, \ldots x^n)$ die Koordinaten in V

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle $b \in U$ die darstellende Matrix des pushfowards $T_{\phi(b)}\phi^{-1}$ bezüglich der Basen $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\phi(b)}$ in $T_{\phi(b)}V$ und $\frac{\partial(\cdot\ \circ\ \phi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\phi(b)}$ in T_bU gerade die Identitäts-Matrix I_n ist.

b) Sei nun $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ eine Karte mit Koordinaten $(y^1, \ldots y^m)$, die $f(a)$ enthält. Bezeichne mit $dx^i\big|_b$ die duale Basis zu $\frac{\partial(\cdot\ \circ\ \phi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\phi(b)}$ und analog $dy^j\big|_c$ für c in Y.
Bitte zeigen Sie, dass der pullback entlang f T_a^*f in den Basen $dx^i\big|_a$ und $dy^j\big|_{f(a)}$ durch die Jacobi-Matrix von $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ dargestellt wird, d.h.

$$(\eta_1(a), \ldots, \eta_n(a)) = (\ \omega_1(f(a)), \ldots, \omega_m(f(a))\ )\ \cdot\ \mathrm{Jac}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(a)).$$

Hinweis: Wir haben in der Vorlesung und dem Übungsbetrieb jeweils ein Resultat besprochen, das eine elegante Lösung hierfür als Korollar hat.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass der Pullback entlang f, f^*, glatte Differentiale auf glatte Differentiale abbildet.
Hinweis: Man kann für den Beweis Teil b) verwenden oder elegant algebraisch argumentieren.

d) Sei $\gamma : I \longrightarrow X$ eine glatte Kurve. **Bitte beweisen Sie** die Gleichheit der Intgrale

$$\int_{f\circ\gamma} \omega \quad \text{und} \quad \int_\gamma f^*\omega.$$

Aufgabe 2 (Glattheit von Kovektorfeldern, 3+2 Punkte)
Bitte zeigen Sie, dass die folgenden 3 Konzepte von glatten Kovektorfelder äquivalent sind.

1. für alle offene Mengen U und alle glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}$ ist $\omega|_U(\mathfrak{X})$ glatt
2. ω lässt sich identifizieren mit einer Restriktions verträglichen Familie $(\omega_U)_{U\subset X}$ von C^∞-linearen Abbildungen $\mathcal{T}(U) \longrightarrow C^\infty(U)$
3. die Komponenten von ω bezüglich beliebiger Karten sind glatt.

Für **2 weitere Punkte zeigen Sie bitte**, dass das folgende Konzept ebenfalls äquivalent ist

4. ω ist eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M und

$$T^*M = \left\{(p,\eta) : \eta \in T_p^*M\right\}.$$

Hinweis: Sie dürfen das folgende Faktum ohne Beweis verwenden. Die durch eine Karte $\phi : U \longrightarrow V$ auf M induzierte Karte Φ auf T^*M ist von der Form

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & T^*U & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^n \\ & (p, \eta = \eta_i \cdot dx^i\big|_p) & \longmapsto & (\phi(p), \eta_1, \ldots, \eta_n), \end{array}$$

wobei $(x^1, \ldots x^n)$ die Koordinaten in V sind.

Aufgabe 3 (Tensoren, 2+2 Punkte)

a) Wir identifizieren Elemente in $V \otimes V^*$ mit Elementen in $Hom(V,V)$ durch

$$(v_0 \otimes \varphi)(w) = \varphi(w) \cdot v_0.$$

Sei $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\left\{e^{1*}, \ldots, e^{n*}\right\}$ die entsprechende duale Basis. **Bitte geben Sie** die darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ für $e_i \otimes e^{j*}$ an.

b) **Beweisen Sie bitte**, dass $V^{[p]}$ der Nullraum ist, falls $p > \dim V$. Verwenden Sie für den Beweis nur Stoff vor der Definition von $V^{[p]}$!