Übungen zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 3**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 23.5.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Geometrische Anschauung zu Tangentialvektoren, 2+1+2+2+2 Punkte)

a) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : (-1, 1) \to X$ eine glatte Kurve in X. **Bitte zeigen Sie**, dass durch
$$g \longmapsto \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$
für glatte g ein Tangentialvektor v_γ in $\gamma(0)$ definiert wird.
Bemerkung: Man kann jeden Tangentialvektor so durch unendlich viele Kurven darstellen.

b) Sei nun X ein endlich dimensionaler Vektorraum. **Bitte zeigen Sie**, dass der in Teilaufgabe a) definierte Tangentialvektor v_γ mit der Richtungsableitung $\partial_{\gamma'(0)}$ in Richtung $\gamma'(0)$ übereinstimmt, d.h.
$$v_\gamma = \partial_{\gamma'(0)}.$$

Im folgenden sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und M die eingebettete $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(c)$.

c) Wir wollen zeigen, dass der Ableitungs(spalten)vektor von f, also $Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)\right)^T$, "senkrecht" auf der Untermannigfaltigkeit $M = f^{-1}(c)$ bzw. dem Tangentialraum T_aM steht.

Bitte zeigen Sie hierfür lediglich, dass für alle glatten Kurven in M mit $\gamma(0) = a \in M$
$$Df(a) \perp \gamma'(0) \iff \big\langle Df(a), \gamma'(0)\big\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$
gilt.
Hinweis: Man betrachte die Funktionen $f \circ \gamma$.

Wir wollen nun die Inverse einer Karte um a betrachten also $\psi : V \longrightarrow U$ mit V offen in $\mathbb{R}^{n-1}$, $a \in U \overset{\text{open}}{\subset} M$ und $\psi(b) = a$. Man nennt ψ auch eine lokale Parametrisierung von M.

d) Man zeige analog, dass die partiellen Ableitungen von ψ auf $Df(a)$ senkrecht stehen, d.h.
$$Df(a) \perp \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(b) \iff \left\langle Df(a), \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(b)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall\ 1 \le i \le n-1.$$

e) Wir können sogar $\psi(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, \varphi(x^1, \ldots, x^{n-1}))$ mit glatten φ als Karte wählen.

Bitte zeigen Sie nun, dass
$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(b), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^{n-1}}(b)$$
eine Basis von T_aM bilden.

Aufgabe 2 ((Eingebettete Unter-)Mannigfaltigkeiten, 2+2+2 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass der Einheitsquader

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) = 1\right\}$$

zwar eine glatte Mannigfaltigkeit ist, aber keine einegbettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

a) Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Homeomorphismus zwischen lokal kompakten Räumen mit abzählbarer Topologie. **Bitte zeigen Sie**, dass X eine glatte Mannigfaltigkeit ist, wenn dies für Y gilt.
Bemerkung: Die lokale Kompaktheit und die Abzählbarkeit der Topologie hätten wir nicht für X fordern müssen.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass Q eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
Hinweis 1: Homeomorphismen erhalten "Löcher".
Hinweis 2: Falls Hinweis 1 nicht hilft, kann man die Aussage leicht auf den Fall von nur 2 Kanten und 1 Ecke reduzieren.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass Q keine einegbettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie am besten die analoge Aussage zu Blatt 2 Aufgabe 2 für den Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 3 (Derivationen, 2 Punkte + 2 Bonuspunkte)
Gegeben sei ein Tangentialvektor $(A_U)_U$ in a. Sei also $D := A_U$ eine Derivation auf $C^\infty(U)$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für alle x in U.
Bitte zeigen Sie, dass

$$D(f/g) = \frac{g(a)D(f) - f(a)D(g)}{g(a)^2}$$

gilt.
Bonusfrage: Man sieht sofort auf der rechten Seite der obigen Gleichung, dass eigentlich $g(a) \neq 0$ ausreicht damit die Derivation reell-wertig "bleibt". Können Sie auch **intuitiv** auf der linken Seite begründen, warum die Abschwächung von $g(x) \neq 0 \; \forall \; x \in U$ zu $g(a) \neq 0$ erlaubt ist?