Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Dr. Thomas Wieber

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2014

Blatt 2, Abgabe bis zum 13.05.2014 um 11:00 Uhr (?)

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1 (Dimension von Mannigfaltigkeiten, 3+1+2 Punkte)

a) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung die jedem Punkt p einer glatten Mannigfaltigkeit M die Werte n_U - für Karten (ϕ, U) mit $U \ni p$ zuordnet - **wohldefiniert ist**. **Für den Beweis benutzen Sie bitte nur Stoff bis zum 2.5.2014**, also der Definition von glatten Mannigfaltigkeiten.
Wir erinnern daran, dass n_U jeweils die Dimension des reellen Raumes ist, in den die Karte $\phi_U : U \to V \subset \mathbb{R}^{n_U}$ ihren Definitionsbereich U schickt.
Hinweis 1: Man betrachte passende Jacobi-Matrizen.
Hinweis 2: Besitzt eine Abbildung Rechts- und Links-Inverse so ist sie ein Isomorphismus. (Darf ohne Beweis verwendet werden)
Bemerkung: Die obige Aussage gilt auch für topologische Mannigfaltigkeiten und dürfte auch so bewiesen werden.

Die oben definierte Abbildung ordnet jedem Punkt p die Dimension der topologischen Mannigfaltigkeit M in diesem Punkt zu. Wir schreiben $p \mapsto \dim_p M$. Ist diese Zahl für jeden Punkt gleich so nennen wir M reindimensional.

b) Bitte zeigen Sie, das jede zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit reindimensional ist.

Wir definieren die Dimension der topologischen Mannigfaltigkeit M -in Zeichen $\dim M$- als $\sup_{p\in M} \{\dim_p M\}$.

c) Geben Sie ein Beispiel an oder widerlegen Sie die folgende Aussage : Es gibt glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension ∞.

Aufgabe 2 (glatte Fktnen auf Untermannigfaltigkeiten, 3 Punkte)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass eine offene Teilmenge X_0 einer glatten Mannigfaltigkeit X selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Es ist ebenfalls bekannt, dass die kanonische Einbettung $\iota : X_0 \to X, x \mapsto x$ eine glatte Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten ist.
Sei nun Y eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $f : Y \to X_0$ eine stetige Abbildung. **Bitte zeigen Sie**, dass f genau dann glatt ist, wenn $\iota \circ f$ glatt ist.

Aufgabe 3 (Atlanten auf top. Mannigfaltigkeiten, 3 Punkte)
Sei X eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit, dann besitzt jeder Atlas auf X mindestens 2 Karten.
Hinweis: Wir haben einen einfachen Fall in der Vorlesung besprochen.

Aufgabe 4 (Pushforward, 4 Punkte)
Sei f eine glatte Abbildung $f : U \longrightarrow V$ zwischen offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Sei nun a ein beliebiger Punkt in U.
Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix der linearen Abbildung $T_a f$ (auch pushforward genannt) gerade die Jacobi-Matrix von f im Punkt a ist.