Übungen „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“ SS 2014, Blatt 1
Eberhard Freitag
abzugeben bis Fr. 25.4.2014

Eine stetige Abbildung heißt eigentlich, falls die Urbilder kompakter Mengen sets kompakt sind.

1. Jede eigentliche injektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.
2. Sei X ein topologischer Raum. (Wer will, darf $X = \mathbb{R}^n$ annehmen.) Für eine Teilmenge $K \subset X$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend.
   1) Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ in X offener Teilmengen U_i mit der Eigenschaft $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit der Eigenschaft $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.
   2) Zu jeder Familie $(U_i)_{i\in I}$ in K offener Teilmengen U_i mit der Eigenschaft $K = \bigcup_{i\in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit der Eigenschaft $K = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Eine Teilmenge mit dieser Eigenschaft heißt kompakt.

3. Seien X, Y topologische Räume ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ genügt) und seien $K \subset X$ und $L \subset Y$ zwei Teilmengen, so dass eine topologische Abbildung $K \to L$ existiert. Dann sind entweder beide Mengen kompakt oder keine von beiden ist kompakt.
4. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle (nicht notwendig beschränkt und möglicherweise auch halboffen). Ein bijektive und stetige Abbildung $I \to J$ ist topologisch.