Übungen „Analysis auf Mannigfaltigkeiten" SS 2014, Blatt 1
Eberhard Freitag
abzugeben bis Fr. 25.4.2014

Eine stetige Abbildung heißt eigentlich, falls die Urbilder kompakter Mengen sets kompakt sind.

1. Jede eigentliche injektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

2. Sei X ein topologischer Raum. (Wer will, darf $X = \mathbb{R}^n$ annehmen.) Für eine Teilmenge $K \subset X$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend.
   1) Zu jeder Familie $(U_i)_{i \in I}$ in X offener Teilmengen U_i mit der Eigenschaft $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit der Eigenschaft $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.
   2) Zu jeder Familie $(U_i)_{i \in I}$ in K offener Teilmengen U_i mit der Eigenschaft $K = \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit der Eigenschaft $K = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Eine Teilmenge mit dieser Eigenschaft heißt kompakt.

3. Seien X, Y topologische Räume ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ genügt) und seien $K \subset X$ und $L \subset Y$ zwei Teilmengen, so dass eine topologische Abbildung $K \to L$ existiert. Dann sind entweder beide Mengen kompakt oder keine von beiden ist kompakt.

4. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle (nicht notwendig beschränkt und möglicherweise auch halboffen). Ein bijektive und stetige Abbildung $I \to J$ ist topologisch.

.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Dr. Thomas Wieber

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2014

Blatt 2, Abgabe bis zum 13.05.2014 um 11:00 Uhr (?)

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1 (Dimension von Mannigfaltigkeiten, 3+1+2 Punkte)

a) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung die jedem Punkt p einer glatten Mannigfaltigkeit M die Werte n_U - für Karten (ϕ, U) mit $U \ni p$ zuordnet - **wohldefiniert ist**. **Für den Beweis benutzen Sie bitte nur Stoff bis zum 2.5.2014**, also der Definition von glatten Mannigfaltigkeiten.
Wir erinnern daran, dass n_U jeweils die Dimension des reellen Raumes ist, in den die Karte $\phi_U : U \to V \subset \mathbb{R}^{n_U}$ ihren Definitionsbereich U schickt.
Hinweis 1: Man betrachte passende Jacobi-Matrizen.
Hinweis 2: Besitzt eine Abbildung Rechts- und Links-Inverse so ist sie ein Isomorphismus. (Darf ohne Beweis verwendet werden)
Bemerkung: Die obige Aussage gilt auch für topologische Mannigfaltigkeiten und dürfte auch so bewiesen werden.

Die oben definierte Abbildung ordnet jedem Punkt p die Dimension der topologischen Mannigfaltigkeit M in diesem Punkt zu. Wir schreiben $p \mapsto \dim_p M$. Ist diese Zahl für jeden Punkt gleich so nennen wir M reindimensional.

b) Bitte zeigen Sie, das jede zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit reindimensional ist.

Wir definieren die Dimension der topologischen Mannigfaltigkeit M -in Zeichen $\dim M$- als $\sup_{p \in M} \{\dim_p M\}$.

c) Geben Sie ein Beispiel an oder widerlegen Sie die folgende Aussage :
   Es gibt glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension ∞.

Aufgabe 2 (glatte Fktnen auf Untermannigfaltigkeiten, 3 Punkte)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass eine offene Teilmenge X_0 einer glatten Mannigfaltigkeit X selbst eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Es ist ebenfalls bekannt, dass die kanonische Einbettung $\iota : X_0 \to X, x \mapsto x$ eine glatte Funktion zwischen Mannigfaltigkeiten ist.
Sei nun Y eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $f : Y \to X_0$ eine stetige Abbildung. **Bitte zeigen Sie**, dass f genau dann glatt ist, wenn $\iota \circ f$ glatt ist.

Aufgabe 3 (Atlanten auf top. Mannigfaltigkeiten, 3 Punkte)
Sei X eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit, dann besitzt jeder Atlas auf X mindestens 2 Karten.
Hinweis: Wir haben einen einfachen Fall in der Vorlesung besprochen.

Aufgabe 4 (Pushforward, 4 Punkte)
Sei f eine glatte Abbildung $f : U \longrightarrow V$ zwischen offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Sei nun a ein beliebiger Punkt in U.
Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix der linearen Abbildung $T_a f$ (auch pushforward genannt) gerade die Jacobi-Matrix von f im Punkt a ist.

Übungen zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 3**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 23.5.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Geometrische Anschauung zu Tangentialvektoren, 2+1+2+2+2 Punkte)

a) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : (-1,1) \to X$ eine glatte Kurve in X. **Bitte zeigen Sie**, dass durch
$$g \longmapsto \frac{d}{dt}(g \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$
für glatte g ein Tangentialvektor v_γ in $\gamma(0)$ definiert wird.
Bemerkung: Man kann jeden Tangentialvektor so durch unendlich viele Kurven darstellen.

b) Sei nun X ein endlich dimensionaler Vektorraum. **Bitte zeigen Sie**, dass der in Teilaufgabe a) definierte Tangentialvektor v_γ mit der Richtungsableitung $\partial_{\gamma'(0)}$ in Richtung $\gamma'(0)$ übereinstimmt, d.h.
$$v_\gamma = \partial_{\gamma'(0)}.$$

Im folgenden sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und M die eingebettete $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(c)$.

c) Wir wollen zeigen, dass der Ableitungs(spalten)vektor von f, also $Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)\right)^T$, "senkrecht" auf der Untermannigfaltigkeit $M = f^{-1}(c)$ bzw. dem Tangentialraum T_aM steht.

Bitte zeigen Sie hierfür lediglich, dass für alle glatten Kurven in M mit $\gamma(0) = a \in M$
$$Df(a) \perp \gamma'(0) \iff \langle Df(a), \gamma'(0)\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$
gilt.
Hinweis: Man betrachte die Funktionen $f \circ \gamma$.

Wir wollen nun die Inverse einer Karte um a betrachten also $\psi : V \longrightarrow U$ mit V offen in $\mathbb{R}^{n-1}$, $a \in U \overset{\text{open}}{\subset} M$ und $\psi(b) = a$. Man nennt ψ auch eine lokale Parametrisierung von M.

d) Man zeige analog, dass die partiellen Ableitungen von ψ auf $Df(a)$ senkrecht stehen, d.h.
$$Df(a) \perp \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(b) \iff \left\langle Df(a), \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(b)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq n-1.$$

e) Wir können sogar $\psi(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}, \varphi(x^1, \dots, x^{n-1}))$ mit glatten φ als Karte wählen.

Bitte zeigen Sie nun, dass
$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(b), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^{n-1}}(b)$$
eine Basis von T_aM bilden.

Aufgabe 2 ((Eingebettete Unter-)Mannigfaltigkeiten, 2+2+2 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass der Einheitsquader

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) = 1\}$$

zwar eine glatte Mannigfaltigkeit ist, aber keine einegbettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

a) Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Homeomorphismus zwischen lokal kompakten Räumen mit abzählbarer Topologie. **Bitte zeigen Sie**, dass X eine glatte Mannigfaltigkeit ist, wenn dies für Y gilt.
Bemerkung: Die lokale Kompaktheit und die Abzählbarkeit der Topologie hätten wir nicht für X fordern müssen.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass Q eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
Hinweis 1: Homeomorphismen erhalten "Löcher".
Hinweis 2: Falls Hinweis 1 nicht hilft, kann man die Aussage leicht auf den Fall von nur 2 Kanten und 1 Ecke reduzieren.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass Q keine einegbettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie am besten die analoge Aussage zu Blatt 2 Aufgabe 2 für den Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 3 (Derivationen, 2 Punkte + 2 Bonuspunkte)
Gegeben sei ein Tangentialvektor $(A_U)_U$ in a. Sei also $D := A_U$ eine Derivation auf $C^\infty(U)$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für alle x in U.
Bitte zeigen Sie, dass

$$D(f/g) = \frac{g(a)D(f) - f(a)D(g)}{g(a)^2}$$

gilt.
Bonusfrage: Man sieht sofort auf der rechten Seite der obigen Gleichung, dass eigentlich $g(a) \neq 0$ ausreicht damit die Derivation reell-wertig "bleibt". Können Sie auch **intuitiv** auf der linken Seite begründen, warum die Abschwächung von $g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in U$ zu $g(a) \neq 0$ erlaubt ist?

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 4**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 30.5.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Pullback, 1+2+2+1 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass der Pullback glatte Differentiale auf eben solche schickt.
Seien X und Y glatte Mannigfaltigkeiten und $f : X \longrightarrow Y$ eine glatte Abbildung. Sei a ein beliebiger Punkt in X und $\phi : U \longrightarrow V$ eine Karte mit $a \in U$. Seien $(x^1, \dots x^n)$ die Koordinaten in V

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle $b \in U$ die darstellende Matrix des pushfowards $T_{\phi(b)}\phi^{-1}$ bezüglich der Basen $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\phi(b)}$ in $T_{\phi(b)}V$ und $\frac{\partial(\cdot\, \circ\, \phi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\phi(b)}$ in T_bU gerade die Identitäts-Matrix I_n ist.

b) Sei nun $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ eine Karte mit Koordinaten $(y^1, \dots y^m)$, die $f(a)$ enthält. Bezeichne mit $dx^i\big|_b$ die duale Basis zu $\frac{\partial(\cdot\, \circ\, \phi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{\phi(b)}$ und analog $dy^j\big|_c$ für c in Y.
Bitte zeigen Sie, dass der pullback entlang f $T^*_a f$ in den Basen $dx^i\big|_a$ und $dy^j\big|_{f(a)}$ durch die Jacobi-Matrix von $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ dargestellt wird, d.h.

$$(\eta_1(a), \dots, \eta_n(a)) = (\ \omega_1(f(a)), \dots, \omega_m(f(a))\ )\ \cdot\ \mathrm{Jac}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(a)).$$

Hinweis: Wir haben in der Vorlesung und dem Übungsbetrieb jeweils ein Resultat besprochen, das eine elegante Lösung hierfür als Korollar hat.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass der Pullback entlang f, f^*, glatte Differentiale auf glatte Differentiale abbildet.
Hinweis: Man kann für den Beweis Teil b) verwenden oder elegant algebraisch argumentieren.

d) Sei $\gamma : I \longrightarrow X$ eine glatte Kurve. **Bitte beweisen Sie** die Gleichheit der Intgrale

$$\int_{f\circ\gamma} \omega \quad \text{und} \quad \int_\gamma f^*\omega.$$

Aufgabe 2 (Glattheit von Kovektorfeldern, 3+2 Punkte)
Bitte zeigen Sie, dass die folgenden 3 Konzepte von glatten Kovektorfelder äquivalent sind.

1. für alle offene Mengen U und alle glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}$ ist $\omega|_U(\mathfrak{X})$ glatt
2. ω lässt sich identifizieren mit einer Restriktions verträglichen Familie $(\omega_U)_{U\subset X}$ von C^∞-linearen Abbildungen $\mathcal{T}(U) \longrightarrow C^\infty(U)$
3. die Komponenten von ω bezüglich beliebiger Karten sind glatt.

Für **2 weitere Punkte zeigen Sie bitte**, dass das folgende Konzept ebenfalls äquivalent ist

4. ω ist eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten M und

$$T^*M = \left\{(p,\eta) : \eta \in T_p^*M\right\}.$$

Hinweis: Sie dürfen das folgende Faktum ohne Beweis verwenden. Die durch eine Karte $\phi : U \longrightarrow V$ auf M induzierte Karte Φ auf T^*M ist von der Form

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & T^*U & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^n \\ & (p, \eta = \eta_i \cdot dx^i\big|_p) & \longmapsto & (\phi(p), \eta_1, \ldots, \eta_n), \end{array}$$

wobei $(x^1, \ldots x^n)$ die Koordinaten in V sind.

Aufgabe 3 (Tensoren, 2+2 Punkte)

a) Wir identifizieren Elemente in $V \otimes V^*$ mit Elementen in $Hom(V,V)$ durch

$$(v_0 \otimes \varphi)(w) = \varphi(w) \cdot v_0.$$

Sei $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $\left\{e^{1*}, \ldots, e^{n*}\right\}$ die entsprechende duale Basis. **Bitte geben Sie** die darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ für $e_i \otimes e^{j*}$ an.

b) **Beweisen Sie bitte**, dass $V^{[p]}$ der Nullraum ist, falls $p > \dim V$. Verwenden Sie für den Beweis nur Stoff vor der Definition von $V^{[p]}$!

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 5**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 6.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Wedge-Produkt und Cartan-Ableitung, 2+2+1,5+1+0,5=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einige Eigenschaften der Cartan-Ableitung nachrechnen. Vermutlich ist ihre Definition über lokale Koordinaten am besten für diese Aufgabe.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für $\alpha \in A^p(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in A^q(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \cdot \beta \wedge \alpha.$$

Hinweis: Zeigen Sie zu erst $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass für $\alpha \in A^p(\mathbb{R}^n)$ und $\beta \in A^q(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \cdot \alpha \wedge (d\beta).$$

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle p gilt $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

d) **Bitte zeigen Sie**, dass für alle f in $C^\infty(U)$ mit U offen in $\mathbb{R}^n$ gilt $d^1(f \cdot d^0(f)) = 0$.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass für die Projektion $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x^1, \ldots, x^n) \mapsto x^i$ die Gleichheit des Basisvektors von T^*M dx^i und der Cartan-Ableitung eben dieser Projektion $d^0(x^i)$ gilt, also $dx^i = d^0(x^i)$.

Aufgabe 2 (Pullbacks, 2+3+1+1=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir den Pullback glatter Differentiale und Tensoren betrachten. Dafür definieren wir

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times \mathbb{R}, \\ & (r, \phi, h) & \longmapsto & (r\cos(\phi), r\sin(\phi), h) \end{array}$$

a) **Bitte zeigen Sie**, dass γ ein (lokaler) Diffeomorphismus ist.

b) **Bitte berechnen Sie**, den Pullback entlang γ für

- $\omega := (x+z) \cdot dx \wedge dy - xy\ dx \wedge dz + dy \wedge dz$
- $\eta := dx \otimes dx \otimes dx \otimes dx$
- $dy \wedge dy$

c) Definieren wir nun $f(x, y, z) := x^2 + y^2$. **Berechnen Sie jetzt** $\gamma^*(f \cdot \omega)$ und $\gamma^*(f \cdot \eta)$.

d) Definieren wir nun $\beta(r, \phi) := \gamma(r, \phi, \sqrt{5})$. **Berechnen Sie jetzt** $\beta^*\omega$.

Aufgabe 3 (Kurvenintegral, 2 Punkte)
Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \longrightarrow X$ eine glatte Kurve. Das Kurvenintegral einer 1-Form entlang γ haben wir definiert als

$$\int_\gamma \omega := \int_I \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

Sei $\phi : U_\phi \longrightarrow V_\phi$ eine Karte auf X mit $\gamma(I) \subset U_\phi$, dann schlagen die Skripten vor das Integral wie folgt zu berechnen

$$\int_\gamma \omega = \int_I \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_I \sum_{i=1}^n \omega_i^\phi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')^i_\phi(t) \ dt.$$

Hierbei sind ω_i^ϕ und $(\gamma')^i_\phi$ die lokalen Koordinaten bezüglich ϕ. Dies sollte aber unabhängig von der Wahl der Karte sein. Sei nun $\psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$ eine Karte auf X mit $\gamma(I) \subset U_\psi$.
Bitte beweisen Sie deshalb die Gleichheit der Funktionen

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^\phi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')^i_\phi(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j^\psi(\gamma(t)) \cdot (\gamma')^j_\psi(t).$$

Hinweis: Mittels Ko- und Kontravarianz sollte dies leicht möglich sein.

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2014 Blatt 6
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 13.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Kohomolgie, 1+2+1+2+1=7 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einige Eigenschaften der Kohomolgie nachrechnen. Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten X und Y.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass der Pullback f^* (Ko-)Zykel auf (Ko-)Zykel und (Ko-)Ränder auf (Ko-)Ränder abbildet, d.h. es gilt

$$f^*(B^p(Y)) \subset B^p(X) \text{ und } f^*(Z^p(Y)) \subset Z^p(X).$$

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} H^p(f): & H^p(Y) & \longrightarrow & H^p(X), \\ & [\omega] & \longmapsto & [f^*\omega] \end{array}$$

wohldefiniert und linear ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass $H^p(id_X) = id_{H^p(X)}$ gilt. Sei $g : Y \longrightarrow Z$ eine weitere glatte Abbildung, **bitte zeigen Sie**, dass dann $H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g)$ gilt.

d) **Bitte widerlegen oder zeigen Sie** die beiden folgenden Aussagen:

1. $f \in \mathrm{Diff}(X, Y)$ impliziert, dass $H^p(f)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen sind.
2. Sind $H^p(f)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen, dann ist f ein Diffeomorphismus.

e) Diffeomorphismen lassen sich auch wie folgt charakterisieren : Ist

$$T_a f : T_a X \longrightarrow T_{f(a)} Y$$

ein Isomorphismus, so existieren Umgebungen U und W von a bzw. $f(a)$, so dass f in $\mathrm{Diff}(U, W)$ liegt. **Bitte zeigen Sie dies!**

Aufgabe 2 (Tensorprodukte, 2 Punkte)
$\mathcal{T}^*(U)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aber auch eine $C^\infty(U)$-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}^{(0,2)}(U)$ die Menge der Tensorfelder vom Typ $(0, 2)$. **Begründen Sie bitte**, mit welchem der beiden Tensorprodukt $\mathcal{T}^{(0,2)}(U)$ identifiziert werden kann

1. $\mathcal{T}^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{T}^*(U)$
2. $\mathcal{T}^*(U) \otimes_{C^\infty(U)} \mathcal{T}^*(U)$.

Aufgabe 3 (Orientierung, 1+3 Punkte + 1 Bonuspunkt)

a) **Bitte zeigen Sie**, dass eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit X entweder 0 oder mindestens 2 Orientierungen hat.

b) Seien $[\mathcal{A}] = \{(\phi, U_\phi)\}$ und $[\mathcal{B}]$ die Orientierungen aus Teil a). Sei $[\mathcal{C}] = \{(\psi, U_\psi)\}$ eine weitere Orientierung. **Bitte zeigen Sie**, dass dann gilt $[\mathcal{A}] = [\mathcal{C}]$ oder $[\mathcal{B}] = [\mathcal{C}]$.

   Hinweis Betrachten Sie die Mengen $X_+ = \big\{a \in X : \exists\ \phi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{C} : \det(\mathrm{Jac}(\phi \circ \psi^{-1}) > 0\big\}$ und $X_- = \big\{a \in X : \exists\ \phi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{C} : \det(\mathrm{Jac}(\phi \circ \psi^{-1}) < 0\big\}$

Bonus) **Bitte geben Sie an**, wie viele Orientierungen eine beliebige Mannigfaltigkeit hat.

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 7**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 20.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1 (Orientierung, 1+2+1+1 +2+2+2=11 Punkte+1+2 Bonuspunkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass für ein Tensorfeld $T \in \mathcal{T}^{p,q}(M)$ und einen Punkt $a \in M$ die Aussagen $T_a = 0$ bzw. $T_a \neq 0$ wohldefiniert sind.

Bonus) Für welche p, q gilt $\mathbb{R}^{\otimes n^2 pq} \subset \mathcal{T}^{p,q}(M)$?

Eine σ-kompakte [1] glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist genau dann orientiert, falls es eine nirgends verschwindende n-Form $\omega \in A^n(M)$ gibt. Wir werden nun die Rückrichtung der Äquivalenz zeigen und dann anschließend mittels dieser Topformen Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten testen.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass man jeden Atlas $\mathcal{A} = \{(\phi, U_\phi)\}$ mit Hilfe von ω „orientieren" kann. D.h. es gibt einen Atlas $\mathcal{A}^\omega$, so dass ω von der Form

$$(\phi^{-1})^*\omega = \omega^\phi_{1\dots n}(x) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

mit $\omega^\phi_{1\dots n}(x) > 0 \ \forall \ x \in V_\phi$ für beliebige Karten ϕ in $\mathcal{A}^\omega$ ist. **Bitte zeigen Sie**, darüberhinaus dass $\mathcal{A}^\omega$ orientiert ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass aus der Existenz von ω folgt $C^\infty(M) \cong A^n(X)$.

c+) **Bitte zeigen Sie**, dass aus der Isomorphie $C^\infty(M) \cong A^n(X)$ die Existenz von ω folgt.

d) Sei nun Y eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Kodimension 1. Wir definieren den Normalenraum N_pY für $p \in Y$ durch die Bedingungen $T_p\mathbb{R}^n = N_pY \oplus T_pY$ und $N_pY \perp T_pY$. **Bitte zeigen Sie**, dass auf einer Karte (ϕ, U_ϕ) von Y eine glatte Abbildung $\nu^\phi : U_\phi \longrightarrow \mathbb{R}^n$ existiert für die in allen Punkten $p \in U_\phi \subset Y$ gilt $\nu^\phi_p \in N_pY \subset \mathbb{R}^n$ und $\left\|\nu^\phi_p\right\| = 1$.

Bonus) **Bitte zeigen Sie**, dass falls Y orientiert ist dann existiert eine glatte Abbildung $\nu : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die auf jedem U_ϕ mit der Abbildung ν^ϕ aus Teil d) übereinstimmt.

e) **Bitte zeigen Sie**, falls solch ein Vektorfeld ν auf ganz Y existiert, dann ist Y orientierbar.

---

[1] M ist σ-kompakt, falls M gleich einer abzählbaren Vereinigung kompakter Teilräume ist. Dies wird aber nur für die Hinrichtung benötigt.

f) Das Möbiusband $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ besitzt die Karten

$$\begin{array}{rccl} \phi: & (0,2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{M} \setminus \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \times \{0\} \times \{0\}, \\ & (\theta, r) & \longmapsto & \left(\left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\theta, \left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\theta, r \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} \psi: & (\pi,3\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{M} \setminus \{-1\} \times \{0\} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ & (\theta, r) & \longmapsto & \left(\left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\theta, \left(1 + r \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\theta, r \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right). \end{array}$$

Bitte zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{M}$ kein Vektorfeld ν wie oben existiert.

Aufgabe 2 (Orientierung mittels Karten, 2+2 Punkte)

a) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\partial\Omega$ ein glatter Rand. Für einen Punkt p auf dem Rand wählen wir 2 Karten ϕ und ψ, die offene Teilmengen von M nach $\mathbb{R}^n$ abbilden. Wir bezeichnen ihre Kartenwechselabbildung mit $\tau = \psi \circ \phi^{-1}$. Für die Orientierbarkeit des Randes müssen wir die Jacobi-Determinante von

$$\vartheta(x^1, \ldots, x^{n-1}) = pr_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ \psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0)$$

berechnen. **Bitte zeigen Sie**, dass

$$\operatorname{Jac}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{Jac}(\vartheta) & * \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

mit $c > 0$ gilt.

Hinweis 1: Warum darf man oBdA annehmen, dass gilt $\phi(p) = 0$, $\psi(p) = 0$ und dass weiterhin $B_1(0)$ im Definitionsbereich von τ liegt?

Hinweis 2: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für das Landau-Symbol $o(\|x - x_0\|) = \epsilon(\|x - x_0\|) \cdot \|x - x_0\|$ gilt. Hierbei hat $\epsilon(\|x - x_0\|)$ die Eigenschaft, dass $\epsilon(t) \to 0$ für $t \to 0$ (wieder ohne Beweis verwendbar).

b) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, die einen Atlas mit 2 Karten ϕ und ψ besitzt, für die also gilt $M = U_\phi \cup U_\psi$. **Bitte zeigen Sie**, dass falls $U_\phi \cap U_\psi$ zusammenhängend ist, dann ist M orientierbar.

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 8**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 27.6.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Maßtheorie, 0,5+1+1+2+1+1+0,5=7 Punkte)
Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis der Topologie.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass $h \equiv \infty$ in $\mathcal{B}^+(X)$ liegt.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rlcl} \|\cdot\|_1 : & \mathrm{Abb}(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \infty \\ & f & \longmapsto & \inf\{I(h) : h \in \mathcal{B}^+(X) : h \geq |f|\} \end{array}$$

die folgenden Eigenschaft hat

$$\|C \cdot f\|_1 = |C| \cdot \|f\|_1, \quad 0 \leq \|f\|_1, \quad \text{und} \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

c) **Bitte zeigen Sie**, dass das Dirac-Maß δ_0 ein Radon-Maß ist.

d) **Bitte zeigen Sie**, dass $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum ist.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass es eine injektive lineare Abbildung $\iota : C^0_C(X) \to \mathcal{L}^\infty, f \mapsto f$ gibt.

f) **Bitte zeigen oder widerlegen Sie**, dass $\iota : \left(C^0_C(X), \|\cdot\|_1\right) \longrightarrow (\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

g) **Bitte zeigen oder widerlegen Sie**, dass $\iota : \left(C^0_C(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \longrightarrow (\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist.

Aufgabe 2 (Satz von Gauß, 1+1+2 Punkte)
Sei Y eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Kodimension 1. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\mathrm{supp}(f) \subset U_\phi \subset Y$. Wir haben also eine Karte $\phi : U_\phi \to V_\phi$. Dann definieren wir das Oberflächenintegral von f auf Y mittels

$$\int_Y f \, \mathrm{d}S := \int_{V_\phi} f(\phi^{-1}(y^1, \ldots, y^{n-1})) \left\| \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1} \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}} \right\| \mu^{n-1}_{Leb}.$$

Hierbei kann man das Kreuzprodukt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ mittels

$$\det \begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^n \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

„berechnen“, wobei die $\mathbf{e}_i$ die Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ sind.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass das so definierte Oberflächenintegral nicht von der Karte mit $\mathrm{supp}(f) \subset U_\psi \subset Y$ abhängt.

Für eine glatte Funktion $f \in C_C^\infty(Y)$ wird das Oberflächenintegral von f auf Y mittels

$$\int_Y f \,\mathrm{d}S := \sum_{i=1}^N \int_{V_\phi} (\eta_i \cdot f)(\phi^{-1}(y^1, \ldots, y^{n-1})) \left\| \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1} \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}} \right\| \mu_{Leb}^{n-1}$$

definiert, wobei $(\eta_i)_{1 \leq i \leq N}$ eine Partition der Eins für den Träger von f ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass das so definierte Oberflächenintegral nicht von der gewählten Partition der Eins abhängt.
Bemerkung: Wir haben somit gezeigt bzw. können analog zeigen, dass auch das Integral von Topformen wohldefiniert ist.

Der Satz von Gauß besagt folgendes: Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Abschnluss und glatten Rand $\partial\Omega$. Sei F eine glatte Funktion $F : W \to \mathbb{R}^n$ mit $\bar{\Omega} \subset W \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \; \mu_{Leb}^n = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \,\mathrm{d}S,$$

wobei ν das von Blatt 7 bekannte Normalenfeld auf $\partial\Omega$ ist. Für dieses gilt

$$\nu_{\phi^{-1}(x)} = \lambda(x) \cdot \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^1}(x) \times \cdots \times \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y^{n-1}}(x)$$

mit $\lambda(x) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

c) **Bitte beweisen Sie** den Satz von Gauß mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe 3 (Kohomologie, 1+1+2 =4 Punkte)
Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \int_X : & H^n(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [\omega] & \longmapsto & \int_X \omega \end{array}$$

wohldefiniert und linear ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass $H^n(X, \mathbb{R})$ nicht 0 ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für die 1. Kohomologiegruppe der 1-Sphäre $H^1(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \Phi^1 : & A^1(S^1) & \longrightarrow & A^1(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} = \left\{ \eta = \eta_1 dx^1 \in A^1(\mathbb{R}) : \eta_1(x+k) = \eta_1(x) \ \forall\ k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \omega = \omega_1(p) \cdot d\theta|_p & \longmapsto & \omega_1(\exp(2\pi i \cdot x)) \cdot dx \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Ebenso gibt es den Isomorphismus $\Phi^0 : A^0(S^1) \to A^0(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ und es gilt $d^0_{\mathbb{R}} \circ \Phi^0 = \Phi^1 \circ d^0_{S^1}$ (alles ohne Beweis) . Betrachten Sie für ω in $\ker\left(\int_X\right)$ die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^x \omega_1(\exp(2\pi i t)) \; dt. \end{array}$$

Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 4.7.2014, 11 Uhr

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1 (Metrik-Konstruktion, 3 Punkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit dann existiert auf M eine Metrik g.
Bemerkung: In der Vorlesung wurde schon ein globaler Tensor konstruiert.

Aufgabe 2 (Metrik-Anwendungen, 1+1+1+1=4 Punkte)
Sei (M, g) eine Riemmansche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \to M$ eine stückweise glatte Kurve, dann definieren wir

$$l_g(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt.$$

a) Sei $\phi : J \to I$ ein Diffeomorphismus mit $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in J$. **Bitte zeigen Sie**, dass dann $l_g(\gamma) = l_g(\gamma \circ \phi)$ gilt.

Wir betrachten nun $\mathbb{H} := \left\{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Darauf gibt es die Metriken $g_{std} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$.

b) **Bitte berechnen Sie** $l_{g_{std}}$ und l_h für die Kurven

$$\begin{array}{rccl} \alpha_n : & (1, n) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (a, t), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \beta_n : & (\frac{1}{n}, 1) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (a, t). \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} \gamma_m : & (-m, m) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (t, b). \end{array}$$

c) **Bitte berechnen Sie** $l_{g_{std}}$ und l_h für die Kurve

$$\begin{array}{rccl} \delta_k : & (\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\pi) & \longrightarrow & \mathbb{H}, \\ & t & \longmapsto & (r\cos t, r \sin t). \end{array}$$

d) Sei (M, g) wieder eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{X}$ ein Vektorfeld. **Bitte zeigen Sie**, dass $\omega = g(\mathfrak{X}, \cdot)$ ein Differential ist und **geben Sie bitte** ω in lokalen Koordinaten an.

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 3 ((Ko-)Tangentialbündel, 1+1+1+1+1+1=6 Punkte)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist ihr Tangentialbündel definiert durch

$$TM = \{(p, v) : v \in T_pM\} .$$

Die durch eine Karte $\phi : U \longrightarrow V$ auf M induzierte Karte Φ auf TM ist von der Form

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & TU & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^n, \\ & (p, v = v^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) & \longmapsto & (\phi(p), v^1, \ldots, v^n), \end{array}$$

wobei $(x^1, \ldots x^n)$ die Koordinaten in V sind. Dadurch wird TM eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

a) **Bitte zeigen Sie**, dass TM eine glatte und orientierte Mannigfaltigkeit ist.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass M eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von TM ist.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für eine glatte Abbildung $g; TM \to TN$ die Aussage

$$\frac{\partial g}{\partial \frac{\partial}{\partial x^i}} = 0 \quad \forall\ i \tag{1}$$

wohldefiniert ist.

d) Was bedeutet Gleichung 1 ?

e) Wir betrachten nun die glatten Mannigfaltigkeiten M und $X = T^*M$. **Bitte zeigen Sie**, dass $T_{(a,\omega)}X \cong T_aM \times T_a^*M$ gilt.

f) Wie sieht die von $\phi : U \to V$ auf TX induzierte Karte aus?

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten **SS 2014** **Blatt 10**
Dr. Thomas Wieber, Sergej Trenkenschu
`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~twieber/ana4.html`

Abgabe: bis Freitag, 18.7.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Aufgabe 1 (Eigenwerte des de Rham-Laplace Operators, 1+1+2=4 Punkte)
Sei X eine orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Sei λ ein Eigenwert des de Rham-Laplace Operators Δ^p_{dR}, es existiert also eine p-Form α für die gilt $\Delta^p_{dR}\ \alpha = \lambda \cdot \alpha$. **Bitte zeigen Sie**, dass $\lambda \geq 0$ gilt.

b) Wir bezeichnen mit $Eig(\lambda, \Delta^p_{dR}) = \{\alpha \in A^p(X) : \Delta^p_{dR}\ \alpha = \lambda \cdot \alpha\}$ den Eigenraum von λ für Δ^p_{dR}. **Bitte zeigen Sie**, dass $Eig(\lambda_i, \Delta^p_{dR})$ und $Eig(\lambda_j, \Delta^p_{dR})$ genau dann senkrecht aufeinander bezüglich des Skalarprodukts $(\cdot, \cdot)$ stehen, falls gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass die Folge der paarweise verschiedenen Eigenwerte des de Rham-Laplace Operators Δ^p_{dR} $(\lambda_k)_k$ unbeschränkt ist.
Hinweis: Wir haben etwas änhliches in Vorlesung bewiesen, was auch im Warner oder Godoy(`http://www.uib.no/filearchive/noteshodge27sep.pdf`) zu finden ist.

Aufgabe 2 (Sternoperator-Allerlei, 1,5+0,5+1+1+1 =5 Punkte)

a) Sei (V, g) ein euklidischer Vektorraum mit einer beliebigen Basis $e_1, \ldots, e_n$. Sei $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$ weiterhin die duale Basis bezüglichdern symbols), then you can use the following se g. **Bitte zeigen Sie**, dass

$$*e^{*I} = \sum_{|J|=p} \sqrt{|g|} \cdot g^{*p}(e^{*I}, e^{*J}) \cdot \epsilon(J, \{1, \ldots, n\} \setminus J) \cdot e^{*\{1,\ldots,n\}\setminus J}$$

für $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ und jeweils $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ gilt.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator für 0-Formen gilt $\Delta^0_{dR} = \delta^1 \circ d^0$, hierbei bezeichnet δ^1 die erste Kodifferentiation .

c) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator für 0-Formen auf offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$s, gilt

$$\Delta^0_{dR} f = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

d) **Bitte zeigen Sie**, dass für glatte p-Formen α und β auch die Funktion $g^{*p}(\alpha, \beta)$ glatt ist.

e) **Bitte zeigen Sie**, dass für den de Rham-Laplace Operator Δ_{dR} mit dem Sternoperator $*$ kommutiert, d.h. $\Delta^{n-p}_{dR}\ * = *\ \Delta^p_{dR}$.

Aufgabe 3 (Hodge-Zerlegung, 0,5+1+0,5+1=3 Punkte)

a) **Bitte zeigen Sie**, dass $\delta^p \circ \delta^{p+1} = 0$ gilt für alle p.

b) **Bitte zeigen Sie**, dass die Räume $\delta^{p+1}(A^{p+1})$, $d^{p-1}(A^{p-1})$ und $\mathcal{H}^p = \ker \Delta^p_{dR}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

c) **Bitte zeigen Sie**, dass die Räume $d^{p-1}\delta^p(A^p)$, $\delta^{p+1}d^p(A^p)$ und $\mathcal{H}^p = \ker \Delta^p_{dR}$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

d) **Bitte zeigen Sie**, die im folgenden Gleichungssystem das 3. und 4. Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned} A^p(X) = A^p &= \mathcal{H}^p \oplus \Delta^p_{dR} A^p \\ &= \mathcal{H}^p \oplus d^{p-1}\delta^p(A^p) \oplus \delta^{p+1}d^p(A^p) \\ &= \mathcal{H}^p \oplus \delta^{p+1}(A^{p+1}) \oplus d^{p-1}(A^{p-1}) \end{aligned}$$