Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 1

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 25.04.2007

---

1. Man beweise den Umlaufsatz: eine differenzierbare, geschlossene, reguläre Jordankurve besitzt die Umlaufzahl ± 1.

   Anleitung: $\alpha : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei eine Parametrisierung der Jordankurve nach der Bogenlänge. Man kann o. E. $\alpha(0) = 0$ und $\alpha([0,l]) \subset H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \leq 0\}$ annehmen. Es sei

   $$D := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq s \leq t \leq l\}$$

   und $A : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ sei definiert durch

   $$A(s,t) = \begin{cases} |\alpha(t) - \alpha(s)|^{-1}(\alpha(t) - \alpha(s)) & \text{falls} \quad s < t \quad \text{und} \quad (s,t) \neq (0,l) \\ \alpha'(s) & \text{falls} \quad s = t \\ -\alpha'(0) & \text{falls} \quad (s,t) = (0,l). \end{cases}$$

   Man zeige:

   (1) A ist stetig, $\displaystyle\int_{A(\partial D)} \frac{dz}{z} = 0$

   (2) Mit der Zerlegung $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$,

   $$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= A(s,s)\,,\ 0 \leq s \leq l, \\ \gamma_2(s) &= A(l-s,l)\,,\ 0 \leq s \leq l, \\ \gamma_3(t) &= A(0,l-t)\,,\ 0 \leq t \leq l, \end{aligned}$$

   berechne man die Umlaufzahl von α, indem man $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$ und $\displaystyle\int_{\gamma_3} \frac{dz}{z}$ separat berechnet. (Beachte $\alpha([0,l]) \subset H$ und $\alpha(0) = \alpha(l) = 0$!)

2. Die Menge $X := \mathbb{R} \cup \{i\} \subset \mathbb{C}$ wird mit folgender Topologie $\mathfrak{T}$ versehen:

   $\mathfrak{T} = \{U \subset \mathbb{R} | U \text{ offen in } \mathbb{R} \text{ im gew. Sinn } \} \cup \{U \cup \{i\} | U \cup \{0\} \text{ offen in } \mathbb{R}\}$.

   Man zeige: $\mathfrak{T}$ ist eine lokal 1-dimensional euklidische, aber nicht hausdorffsche Topologie auf X.