Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 6

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 06.06.2007

---

1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit, M erhält die vom Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^n$ induzierte Riemann'sche Metrik. Man zeige, dass der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang auf M gegeben ist durch

$$(\nabla_v X)(x) = P(x)(D_v X)(x)$$

wobei X Vektorfeld auf M, $x \in M$, $v \in T_x M$, und D die Standardableitung in $\mathbb{R}^n$, und $P(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ die orthogonale Projektion.

2. (a) Es sei $A_0 = (A^0_{ij}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ eine symmetrische Matrix, welche λ_0 als einfachen Eigenwert besitzt mit zugehörigem Eigenvektor $v_0, |v_0| = 1$.
   Man zeige: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass das Eigenwertproblem

$$(A - \lambda)\, v = 0, \ \ |v| = 1$$

   für $|A - A_0| < \varepsilon$ Lösungen (λ, v) besitzt, welche differenzierbar (C^∞) von A abhängen und für $A = A_0$ mit (λ_0, v_0) übereinstimmen.

   (b) Mit Hilfe von (a) zeige man, dass aus der Existenz einer Lorentz-Metrik auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M die Existenz von stetigen Linienfeldern (d. h. von 1-dimensionalen Vektorbündeln im Tangentialbündel) folgt.

3. Man berechne die Christoffelsymbole eines Levi-Civita-Zusammenhangs explizit durch die Koeffizienten g_{ij} der Metrik, sowie die Koeffizienten R^ℓ_{ijk} des Krümmungstensors in Termen von g_{ij} und Γ^k_{ij} $(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^\ell_{ijk}\partial_\ell)$!

4. Der n-dimensionale hyperbolische Raum $\mathbb{H}^n$ ist die Mannigfaltigkeit $\{x = (x^1, \ldots x^n) \in \mathbb{R}^n |\, x^n > 0\}$ versehen mit der Metrik

$$g(v, w)|_x := (x^n)^{-2} \langle\, v, w \,\rangle$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist. Man berechne den zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhang sowie dessen Krümmungstensor.

5. Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, g eine pseudo-Riemann'sche Metrik auf N und $\varphi : M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Wir definieren das "zurückgezogene" Tensorfeld $\varphi^* g$ durch

$$(\varphi^* g)(x)\,(v, w) := g(\varphi(x))\,(\varphi_{*,x}\, v, \varphi_{*,x}\, w)$$

$(x \in M;\ v, w \in T_x M)$. Man zeige:

(a) Ist φ ein lokaler Diffeomorphismus, so ist $\varphi^* g$ nicht ausgeartet, d. h. wieder eine pseudo-Riemann'sche Metrik.

(b) Ist g Riemann'sch und φ nur Immersion, so ist $\varphi^* g$ wieder Riemann'sch.

(c) Ist φ nur Immersion, so kann $\varphi^* g$ i. a. ausgeartet sein (Beispiel!)

6. Es bezeichne $\mathbb{R}^{n,1}$ den $(n+1)$-dimensionalen Minkowski-Raum, d. h. $\mathbb{R}^{n,1}$ ist $\mathbb{R}^{n+1}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n - x^{n+1} y^{n+1}$$

Man zeige:

(a) Die "Sphäre"

$$S := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \big| \langle x, x \rangle = -1\}$$

ist eine raumartige Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n,1}$, d. h. das Minkowski-Skalarprodukt ist positiv auf dem Tangentialbündel TS.

(b) Man überlege, dass S zwei Komponenten S^+ und S^- besitzt, nämlich $S^\pm = \{x \in S \big| \pm x^{n+1} > 0\}$. Es sei σ die stereographische Projektion von S^+ in die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \big| x^{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n$ vom "Südpol" $P^- = (0, \ldots, 0, -1) \in S^-$ aus, d. h. für $x \in S^+$ ist $\sigma(x)$ der Punkt der Verbindungsstrecke von x und P^-, dessen $(n+1)$-te Koordinate 0 ist. Man zeige, dass σ ein Diffeomorphismus von S^+ auf die offene Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist und man berechne σ^{-1}. Sodann berechne man die von S^+ zurückgezogene Minkowski-Metrik $(\sigma^{-1})^* \langle . \, , . \rangle$!

Dies liefert das Kugelmodell des hyperbolischen Raums, zur Kontrolle:

$$(\sigma^{-1})^* \langle v, w \rangle \big|_y = \frac{4}{(1 - |y|^2)^2} \langle v, w \rangle$$

für $y \in B_1(0)$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$.