**Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 5**

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

---

Abgabetermin: Mittwoch, 23.05.2007

---

1. (a) Es seien $M, N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus und $X$ ein differenzierbares Vektorfeld auf $N$.

   Man zeige: $\alpha$ ist eine Integralkurve von $X$ genau dann, wenn $\varphi^{-1} \circ \alpha$ eine Integralkurve von $\varphi^* X$ ist (Zur Erinnerung: $\varphi^* X = (\varphi^{-1})_* \circ X \circ \varphi$).

   (b) Es sei $F = F(x,t)$ der Fluss von $X$ ($F$ existiert zumindest in einer Umgebung von $M \times \{0\}$) und $Y$ sei ein weiteres Vektorfeld auf $N$.

   Man zeige:

   $$[X, Y] = \frac{d}{dt} F(\ .\ , t)^* Y \,|_{t=0}\,.$$

   Hinweis: Wegen der Transformationsregeln für Vektorfelder, das Lie-Produkt und Integralkurven (vgl. (a) und Aufg. 2 auf Blatt 4) kann man annehmen: $N$ ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Untermannigfaltigkeit und $NM$ ihr Normalbündel, d. h. $NM$ ist die disjunkte Vereinigung aller Normalräume $N_x := (T_x M)^\perp \subset \mathbb{R}^n,\ x \in M$. Man gebe einen Vektorbündelatlas von $NM$ an, welcher $NM$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und die Abbildungen $p : (x,v) \mapsto x,\ q : (x,v) \mapsto v$ ($x \in M$, $v \in N_x$) zu differenzierbaren Abbildungen $p : NM \to M,\ q : NM \to \mathbb{R}^n$ macht.

3. Es sei $M$ differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft, dass ein globales glattes Basisfeld existiert, d. h. es gibt differenzierbare Vektorfelder $V_1, \ldots V_m$, sodass $V_1(x), \ldots V_m(x)$ eine Basis von $T_x M$ bilden für alle $x \in M$. Man zeige, dass durch

   $$\nabla_X Y := (XY^i) V_i \quad \text{für} \quad Y = Y^i V_i$$

   ein Zusammenhang auf $M$ definiert ist. Man berechne Torsions- und Krümmungstensor!

4. Man zeige: Sind $\nabla$ und $\widetilde{\nabla}$ Zusammenhänge auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$, so ist $\nabla - \widetilde{\nabla}$ ein $(2,1)$-Tensorfeld auf $M$; umgekehrt ist $\nabla + S$ ein Zusammenhang für jedes $(2,1)$-Tensorfeld $S$ auf $M$.