Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 4

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 16.05.2007

1. Man verifiziere die Jacobi-Identität für das Lie-Produkt von Vektorfeldern:
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0\,.$$

2. Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für Vektorfelder X auf N definiert man das "zurückgezogene" Vektorfeld $\varphi^* X$ auf M durch
$$\varphi^* X := (\varphi^{-1})_* \circ X \circ \varphi\,,$$
d. h. $(\varphi^* X)(x) = (\varphi^{-1})_{*,\varphi(x)} X(\varphi(x)) \;\forall\, x \in M$. Man zeige:
$$[\varphi^* X, \varphi^* Y] = \varphi^*[X,Y]\,.$$

3. Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, M mit abzählbarem Atlas, $m = \dim M < n = \dim N$, und $f : M \to N$ sei eine differenzierbare Abbildung.

   Man zeige: $f(M)$ ist eine Nullmenge in N in folgendem Sinn: Ist (V,ψ) eine Karte auf N, so ist $\psi(f(M)\cap V)$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

4. Es sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2\dim M + 1$. Es sei $\Delta = \{(x,y) \in M \times M \,|\, x = y\}$ und $\sigma : (M\times M)\backslash\Delta \to \mathbb{S}^{n-1}$ werde definiert durch
$$\sigma(x,y) = \frac{x-y}{|x-y|}\,.$$
   Man zeige:

   (a) Es gibt $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $v \notin \overline{\text{Bild}(\sigma)}$ (Hinweis Aufgabe 3).

   (b) Definiert man die schiefe Projektion $P_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ durch
$$P_v(x) = x - \frac{x_n}{v_n}\,v\,,$$
   so kann man v so wählen, dass $P_v|M$ eine differenzierbare Einbettung wird.

   (c) Man folge aus (a) und (b), dass man jede m-dimensionale kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit differenzierbar in $\mathbb{R}^{2m+1}$ einbetten kann.