Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 3

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 09.05.2007

1. Es sei $O(n)$ die Gruppe der orthogonalen Transformationen von $\mathbb{R}^n$.

   (a) Man zeige, dass $O(n)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des Vektorraums $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ aller linearen Selbstabbildung von $\mathbb{R}^n$ ist und berechne die Tangentialräume von $O(n)$.

   (b) Man überlege sich, dass die Abbildungen $(A, B) \mapsto AB$ und $A \mapsto A^{-1}$ C^∞-Abbildungen $O(n) \times O(n) \to O(n)$ bzw. $O(n) \to O(n)$ sind.

   (c) Man zeige, dass die Abbildung

   $$\mathrm{Exp} : T_{\mathrm{Id}}O(n) \to O(n), \quad \mathrm{Exp}(S) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k$$

   von der Klasse C^∞ und ein lokaler Diffeomorphismus bei $0 \in T_{\mathrm{Id}}O(n)$ ist.

   Bemerkung: $O(n)$ ist ein Beispiel für eine Lie-Gruppe.

2. Es sei $G_{n,k}$ die Menge alle k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Man mache sich zunächst klar, dass zwischen $G_{n,k}$ und der Menge $\mathcal{P}_{n,k}$ aller orthogonalen Projektoren $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vom Rang k eine eineindeutige Beziehung besteht. $G_{n,k}$ wird daher eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn man nachweist: *$\mathcal{P}_{n,k}$ ist eine differenzierbare $k(n-k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, dem Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$.*

   Anleitung:

   (a) Das E. Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren, welches jedem k-tupel linear unabhängiger Vektoren $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ ein Orthonormalsystem $(b_1, \dots, b_k)$ zuordnet, so das gilt

   $$\mathrm{span}(a_1, \dots, a_j) = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_j), \ 1 \le j \le k\,,$$

   ist eine Abbildung der Klasse C^∞.

   (b) Ist $P_0 \in \mathcal{P}_{n,k}$, so existiert eine ε-Kugel $B_\varepsilon(P_0) \subset \mathcal{P}_{n,k}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $V := \mathrm{range}(P_0)$ und ist $e_1, \dots e_k$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für alle $P \in B_\varepsilon(P_0)$:

   $$\mathrm{range}(P) = \mathrm{span}(e_1 + h_1, \dots e_k + h_k)$$

   mit durch P eindeutig bestimmten Vektoren $h_1, \dots h_k \in V^\perp$ und bei $P \to P_0$ folgt $h_1, \dots h_k \to 0$.

   (c) Es sei $P(h_1, \dots h_k)$ der orthogonale Projektor mit $\mathrm{range}P(h_1, \dots h_k) = \mathrm{span}(e_1 + h_1, \dots e_k + h_k)$ wie in (b).

   Man berechne $dP(0, \dots 0)$ indem man (a) verwendet und verifiziere, dass $dP(0, \dots 0) : (V^\perp)^k \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ injektiv ist (d. h. P ist nahe bei $(0, \dots 0) \in (V^\perp)^k$ eine Immersion).

   Die Mannigfaltigkeiten $G_{n,k} \cong \mathcal{P}_{n,k}$ nennt man Grassmann-Mannigfaltigkeiten.