Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 2

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 02.05.2007

---

1. Es sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und F eine Familie von Abbildungen $f : X \to Y$. Man zeige:

$$T := \{U \subset Y | \, f^{-1}(U) \text{ offen in } X \,\forall\, f \in F\}$$

ist eine Topologie auf Y bezüglich derer alle $f \in F$ stetig werden, und zwar die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft (d. h. die mit den meisten offenen Mengen).

Spezialfall: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, Y die Menge der Äquivalenzklassen und $F = \{p\}$, wobei $p : X \to Y$ die kanonische Projektion ist ($p(x)$ ist die Äquivalenzklasse von x), so heißt die entsprechende Topologie auf Y die Quotiententopologie von X bezüglich der Äquivalenzrelation.

2. *Definition:* Es seien X, Y topologische Räume und $p : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Das Tripel (X, Y, p) heißt *Überlagerung*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass gilt: $p^{-1}(V)$ ist disjunkte Vereinigung einer Familie $\mathfrak{U}$ von offenen Mengen und $p : U \to V$ ist ein Homöomorphismus für alle $U \in \mathfrak{U}$.

Es sei sodann X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe (bzgl. der Komposition von Abbildungen) von Homöomorphismen von X mit folgenden Eigenschaften:

(i) Besitzt $g \in G$ einen Fixpunkt, so ist $g = id$.

(ii) Sind $x_k \in X,\ g_k \in G$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $x_k \to x \in X,\ g_k(x_k) \to y \in X$ $(k \to \infty)$, so existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ mit $g_k = g$ für $k \geq k_0$.

Es sei Y der Quotientenraum von X bezüglich der Relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, g \in G : g(x) = y$$

Man zeige:

(a) Für endliche G folgt (ii) aus (i).

(b) Zu $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x mit

$$U \cap g(U) = \emptyset \,\forall\, g \in G \backslash \{id\}\,.$$

(c) $p : X \to Y$ ist eine Überlagerung und Y ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(d) Ist darüberhinaus X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so besitzt Y genau einen maximalen differenzierbaren Atlas, so dass p ein lokaler Diffeomorphismus wird.

(e) Man betrachte folgende Beispiele:

i. $X = \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \, |x| = 1\}, G = \{id,\, x \mapsto -x\}$.
Y ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n$.

ii. $X = \mathbb{R}^2$, G die von den Translationen $(x^1, x^2) \mapsto (x^1 + 1, x^2)$ und $(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2 + 1)$ erzeugte Gruppe. Geben Sie eine alternative Beschreibung von Y!

iii. $X = \mathbb{R}^2$, G die von Abbildungen $(x^1, x^2) \mapsto (x^1{+}1, x^2)$ und $(x^1, x^2) \mapsto (1 - x^1, x^2 + 1)$ erzeugte Gruppe Y ist die "Kleinsche Flasche".