Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 11

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 11.07.2007

1. Es sei $(M, \langle\, .\, ,\, .\rangle)$ Riemann'sche Mannigfaltigkeit der Dimension m.

   (a) Für die Divergenz eines Vektorfeldes $X = X^k \partial_k$ zeige man die Formel

   $$\mathrm{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_k \left(\sqrt{g}\, X^k\right)$$

   wobei $g = \det(g_{ij}) = \det\left(\langle \partial_i, \partial_j\rangle\right)$. Man leite hieraus eine entsprechende Formel für den Laplace-Beltrami-Operator her!

   (b) Ist M zusätzlich orientiert, so konstruiere man zu einem Vektorfeld X eine $(m-1)$-Form σ_X, so dass gilt

   $$d\,\sigma_X = (\mathrm{div} X)\omega,$$

   wobei ω die Volumenform ist. Hierbei vergewissere man sich, dass σ_X koordinatenunabhängig definiert ist.

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele möglicher Klausuraufgaben!

2. Es sei D der Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ (d. h. $(D_V W)(x) = V^k \frac{\partial W}{\partial x^k}(x)$) und $\langle\, .\, ,\, .\rangle$ das Standardskalarprodukt. Sind durch die folgenden Ausdrücke Zusammenhänge auf $\mathbb{R}^n$ definiert?

   Wenn ja, berechne man den zugehörigen Riemann'schen Krümmungstensor!

   (a) $\nabla_V W = D_V W + V + W$

   (b) $(\nabla_V W)(x) = \langle V, W(x)\rangle x$

   (c) $(\nabla_V W)(x) = (D_V W)(x) + \langle V, W(x)\rangle x$

3. Für die n-dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \big| |x| = 1\}$ sei folgende Karte (U, φ) gewählt:

   $$U = \{x \in \mathbb{S}^n |\ x^{n+1} > 0\},\ \ \varphi(x^1, \dots x^{n+1}) = (x^1, \dots x^n)\,.$$

   Man berechne die zugehörige Standardbasis $\partial_1, \dots \partial_n$, sowie die entsprechenden Komponenten g_{ij} des metrischen Tensors von $\mathbb{S}^n$, aufgefasst als Riemann'sche Untermannigfaltigkeit des Euklidischen $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Es sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$. Sind folgende Kurven Geodätische von M als Riemann'sche Untermannigfaltigkeit des Euklidischen $\mathbb{R}^3$?

   $$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t,\, \sin t,\, e^t),\ \ t \in \mathbb{R} \\ \beta(t) &= (\cos t,\, \sin t,\, t),\ \ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$