Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 10

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 04.07.2007

---

1. Sei (M, g) pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Für eine Funktion $f \in C^2(M)$ definieren wir die Hesse'sche Form h_f als kovariante Ableitung des Differentials df, also
$$h_f(X, Y) = X\, df(Y) - df(\nabla_X Y)\,.$$
Man zeige: h_f ist symmetrisch,
$$\begin{aligned} h_f(X, Y) &= \langle \nabla_X \operatorname{grad} f,\, Y\rangle\,, \\ \text{und } \Delta f &= \operatorname{spur} h_f\,. \end{aligned}$$

2. Es sei g Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}$ und $M_\kappa = \mathbb{R}^n$ für $\kappa \geq 0$, $M_\kappa = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x| < \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\}$ für $\kappa < 0$. M_κ werde mit der Metrik $g_\kappa = \varphi_\kappa g$ versehen, wobei
$$\varphi_\kappa(x) = 4(1 + \kappa\, |x|^2)^{-2}\,.$$
Mit Hilfe von Aufgabe 3., Blatt 9 weise man nach, dass $(M_\kappa,\, g_\kappa)$ die konstante Krümmung κ besitzt. Ferner zeige man, dass die punktierte Standardsphäre $\mathbb{S}^n \backslash \{p\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ isometrisch zu M_1 ist und schließe daraus, dass $\mathbb{S}^n$ die konstante Krümmung 1 besitzt.

3. Sei (M, g) pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe von isometrischen Diffeomorphismen von (M, g), welche den Bedingungen (i), (ii) von Aufgabe 2., Blatt 2 genügt, und es sei $\tilde{M} = M/G$.

   Man zeige: Es gibt genau eine Metrik $\tilde{g}$ auf $\tilde{M}$, so dass die kanonische Projektion $p : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie ist.

   Für $M = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Euklidischen Metrik und die von den Translationen $x \mapsto x + e_k$, $k = 1, \ldots, n$ erzeugte Gruppe G erhält man den "flachen Torus". Man bestimme dessen geschlossene Geodätische.