Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 9

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

Abgabetermin: Mittwoch, 27.06.2007

---

1. Man erinnere sich zunächst, wie die Spur eines Vektorraumendomorphismus definiert ist. Sodann sei (M, g) pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und ∇ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang. Für ein differenzierbares Vekorfeld X auf M definieren wir die Divergenz durch

$$\operatorname{div} X = \operatorname{Spur}(Z \mapsto \nabla_Z X)\,.$$

Für eine differenzierbare Funktion f auf M definieren wir den Gradienten durch

$$f_{*,p}(Z) = \langle Z, \operatorname{grad}\, f(p)\rangle \,\forall\, Z \in T_pM \,\forall_p \in M\,.$$

Der "Laplace-Beltrami-Operator" von (M, g) werde definiert durch

$$\Delta f := \operatorname{div}\, \operatorname{grad} f\,.$$

   (a) Man zeige die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\,(fX) &= f \operatorname{div}\, X + Xf\,, \\ \Delta(fh) &= f\Delta h + 2\langle \operatorname{grad} f,\, \operatorname{grad} h\rangle + h\Delta f\,. \end{aligned}$$

   (b) Man berechne $\operatorname{div}X$, $\operatorname{grad} f$ und Δf in lokalen Koordinaten.

2. Zwei pseudo-Riemann'sche Metriken g und $\tilde{g}$ auf der Mannigfaltigkeit M heißen konform äquivalent, wenn es eine positive Funktion φ gibt mit $\tilde{g} = \varphi g$. Für die zugehörigen Levi-Civita Zusammenhänge zeige man in diesem Fall:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\{(X\ell n\varphi)Y + (Y\ell n\varphi)X - \langle X, Y\rangle \operatorname{grad} \ell n\varphi\}\,,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\operatorname{grad}} f &= \frac{1}{\varphi} \operatorname{grad} f,\ \tilde{\operatorname{div}} X = \operatorname{div}X + \frac{m}{2} X\ell n\varphi, \\ \tilde{\Delta} f &= \frac{1}{\varphi}\left(\Delta\, f + \left(\frac{m}{2} - 1\right)\ \langle \operatorname{grad} \ell n\varphi,\, \operatorname{grad} f\rangle\right)\,. \end{aligned}$$

3. Die pseudo-Riemann'schen Metriken g und $\tilde{g}$ mögen in der Beziehung $\tilde{g} = \varphi g$ stehen mit einer Funktion $\varphi > 0$, vgl. vorige Aufgabe. Man zeige für die zugehörigen Krümmungstensoren die Relation

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{2}(\langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Z\rangle\, Y - \langle \nabla_Y \operatorname{grad} f, Z\rangle X + \langle X, Z\rangle \nabla_Y \operatorname{grad} f$$

$$-\langle Y, Z\rangle \nabla_Y \operatorname{grad} f) + \frac{1}{4}\big[(Y\, f\, Z\, f - \langle Y, Z\rangle\, \langle \operatorname{grad} f,\, \operatorname{grad} f\rangle)X$$

$$-(X\, f\, Z\, f - \langle X, Z\rangle\, \langle \operatorname{grad} f,\, \operatorname{grad} f\rangle)\, Y + (X\, f\langle Y, Z\rangle - Y\, f\langle X, Z\rangle) \operatorname{grad} f\big]$$

wobei $f = \ell n\varphi$ und $\langle X, Y\rangle = g(X, Y)$.