

## Übungen zur Differentialgeometrie — Blatt 7

Heidelberg, Sommersemester 2007 – Prof. F. Tomi

---

Abgabetermin: Mittwoch, 13.06.2007

---

1. Es sei  $G$  eine Lie-Untergruppe von  $GL(n)$ .
  - (a) Man gebe alle linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  an und berechne die Lie-Klammer zweier solcher Vektorfelder am neutralen Element  $I \in G$
  - (b) Man stelle die Differentialgleichung für Geodätische des linksinvarianten Zusammenhangs von  $G$  auf und gebe alle Geodätischen mit Anfangspunkt  $I \in G$  an. Ferner konstruiere man Beispiele von geschlossenen Geodätischen.
  
2. (a) Man zeige, dass folgende Abbildungen Isometrien des hyperbolischen Halbraums  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$  sind:
  - "horizontale" Translationen  $x \mapsto x + a$  mit  $a^n = 0$ .
  - Streckungen  $x \mapsto \lambda x$  mit  $\lambda > 0$ .
  - Spiegelungen an "vertikalen" Hyperebenen  $\{x \mid \langle x, a \rangle = \text{const}\}$  mit  $a^n = 0$ .
  - Spiegelungen an Sphären mit Mittelpunkt  $a \in \partial\mathbb{H}^n$ .(Die von *allen* Translationen, Streckungen und Spiegelungen an Hyperebenen und Sphären erzeugte Gruppe nennt man Möbiusgruppe).
  
- (b) Es bezeichne  $M_h$  die von den in (a) genannten Isometrien von  $\mathbb{H}^n$  erzeugte Untergruppe der Gruppe der Möbiustransformationen. Man zeige:
  - i. zu  $x, y \in \mathbb{H}^n$  existiert  $\varphi \in M_h$  mit  $\varphi(x) = y$  ( $M_h$  operiert transitiv auf  $\mathbb{H}^n$ ).
  - ii. zu  $x \in \mathbb{H}^n$  und einer linearen Isometrie  $J$  von  $T_x\mathbb{H}^n$  (welches sind diese?) existiert  $\varphi \in M_h$  mit

$$\varphi(x) = x \quad \text{und} \quad \varphi_{*,x} = J.$$

Hinweis: Jede orthogonale Transformation von  $\mathbb{R}^n$  ist das Produkt von höchstens  $n$  Spiegelungen an Hyperebenen.

- iii. Man finde eine Möbiustransformation, welche  $\mathbb{H}^n$  auf die Einheitskugel  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  abbildet und weise nach, dass sie eine Isometrie von  $\mathbb{H}^n$  auf  $B_1(0)$  mit der in Aufgabe 6. (b) von Blatt 6 angegebenen Metrik ist.