Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Wintersemester 2009/10
Abgabe: Freitag, 04. 12. 09, bis 09:14h in den Briefkästen

Für jede Aufgabe gibt es maximal 4 Punkte, für die Bonusfrage 2 Extrapunkte.

Aufgabe 30. Warum ist jede holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt, konstant?

Aufgabe 31. Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet D. Zeige: Der Realteil

$$u(x,y) \;:=\; \mathrm{Re}\, f(x+iy)$$

ist eine harmonische Funktion. Achtung: Warum ist die Funktion $u(x,y)$ überhaupt zweimal differenzierbar?

Aufgabe 32. Auf der gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei $u(x,y)$ definiert durch

$$u(x,y) \;:=\; \log\sqrt{x^2+y^2}.$$

Zeige: u ist harmonisch, aber es gibt *keine* holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit

$$\mathrm{Re}\, f(x+iy) \;=\; u(x,y).$$

Bonusfrage. In Teil 3(b) der Zentralübung am 16. 11. haben wir gesehen, dass *jede* harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^2$ als Realteil einer holomorphen Funktion auf $D=\mathbb{C}$ entsteht wie in Aufgabe 31. Obiges Beispiel zeigt, dass dies für $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *nicht* gilt. An welcher $\mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ unterscheidenden Eigenschaft liegt das?

Aufgabe 33. Was ist das Residuum von $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$?

Aufgabe 34. Man berechne das Integral

$$\int_{\partial Q} \frac{dz}{z},$$

wobei Q das Quadrat mit den Ecken $\pm 1 \pm i$ sei.

Aufgabe 35. Zeige: Wenn die Kreislinie $|z-a|=r$ die Strecke $[0,1]$ auf der reellen Achse nicht trifft, dann ist

$$\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z(z-1)} = 0.$$

Die Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der zugehörigen Homepage:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysWS0910/`