Hinweise zu Aufgabe 5 des Klausur-Vorbereitungsblattes

Gesucht war in dieser Aufgabe das Maximum von $F(x,y,z) := xy+yz+xz$ auf der Einheitssphäre

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} \quad \text{für} \quad f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1.$$

Man beachte, dass ein solches Maximum existieren muß, weil F stetig und S abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist!

Sei jetzt $(x,y,z) \in S$ eine Stelle, wo F dieses Maximum annimmt (wobei nicht impliziert werden soll, dass diese Stelle eindeutig wäre; in der Tat werden wir unten finden, dass es genau zwei solche Stellen gibt). Insbesondere ist dann (x,y,z) eine lokale Extremstelle von F, also gibt es nach dem Satz von den Lagrangeschen Multiplikatoren ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} = \operatorname{grad} F(x,y,z) \overset{!!}{=} \lambda \cdot \operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{pmatrix}$$

Somit erfüllt (x,y,z) notwendigerweise das Gleichungssystem*

$$\left| \begin{array}{rcl} y+z & = & 2\lambda x \\ x+z & = & 2\lambda y \\ x+y & = & 2\lambda z \end{array} \right| \tag{1}$$

und wegen $(x,y,z) \in S$ ist ferner

$$x^2+y^2+z^2 = 1. \tag{2}$$

Wenn man nicht gerade an einer viel zu kleinen Tafel steht, lassen sich diese Gleichungen ohne großen Aufwand wie folgt auswerten:

Durch Addieren aller drei Gleichungen im Gleichungssystem (1) erhält man zunächst $2(x+y+z) = 2\lambda(x+y+z)$, also $\lambda = 1$ oder $x+y+z = 0$. Betrachten wir diese beiden Fälle nun jeweils gesondert:

a) Ist $\lambda = 1$, dann ist das Gleichungssystem (1) nach kurzer Umformung äquivalent zu $x = y = z$. Zusammen mit Gleichung (2) folgt dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = +\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In beiden Fällen ist $F(x,y,z) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = +1$.

---

* Man beachte, dass hier natürlich NICHT die Umkehrung behauptet wird; die Gültigkeit des Gleichungssystems stellt zunächst nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums oder gar globalen Maximums dar.

b) Ist andererseits $x + y + z = 0$, dann ist $z = -x - y$, und somit liefert Gleichung (2) die Bedingung $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 1$, d.h.

$$x^2 + y^2 + xy \;=\; 1/2.$$

Damit ist der Funktionswert von F an der betreffenden Stelle also

$$\begin{aligned} F(x, y, -x - y) &= xy + y(-x - y) + (-x - y)x \\ &= -x^2 - y^2 - xy \\ &= -1/2. \end{aligned}$$

Wegen $-1/2 < +1$ folgt nun insgesamt:

Der maximale Wert von F auf S ist $+1$ und wird genau in den beiden Punkten $(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ angenommen.

Als Übung kann es hilfreich sein, sich das Ergebnis durch eine Skizze zu veranschaulichen: Die Gleichung $x + y + z = 0$ definiert eine Ebene $H \subset \mathbb{R}^3$, und die Funktion F ist invariant unter Spiegeln an H. Der Schnitt $H \cap S$ ist ein Kreis, auf welchem F den konstanten Wert $-1/2$ annimmt. Betrachtet man diesen Kreis $H \cap S$ als Äquator von S (sodass also S zu einem "gekippten Globus" wird), dann sind die Werte von F am Äquator minimal und steigen bei Annäherung an die Polkappen an bis auf den maximalen Wert $+1$ am Nord- und am Südpol. Wer Langeweile hat, kann jetzt auch den Wert von der Funktion F in Heidelberg ausrechnen (geographische Breite etwa 49°)...

...und noch etwas Beschäftigung

Und für alle diejenigen, die noch etwas üben und dasjenige nachholen möchten, was wir heute in der Zentralübung gemacht hätten, wenn Hörsaal und eine vernünftige Tafel uns nicht durch eine Organisationspanne bei der Physik verschlossen geblieben wären, hier noch einige Aufgaben:

a) Man zeige, dass für jede positiv definite $(n \times n)$-Matrix

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leq R} e^{-x^t A x} d(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

ist, indem man zunächst A auf Sylvester-Normalform transformiere und das Integral mittels Transformationsformel auf ein aus der Vorlesung bekanntes Integral zurückführe.

b) Ein Generator erzeugt eine Wechselspannung $f(t) = \sin t$. Diese werde auf zwei verschiedene Weisen gleichgerichtet:

   a) mit einer Diode,
   b) mit einer Schaltung, die das Vorzeichen jeder zweiten Halbwelle umdreht.

   Man stelle die am Ausgang der Schaltung erhaltene Spannung in beiden Fällen durch eine Fourierreihe dar!

c) Man bestimme via Lagrange-Multiplikatoren die Minima und Maxima der Funktion $F(x, y, z) := y^2 - xz$ unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x + y + z = 3.$$

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei explizit darauf hingewiesen, dass aus diesen zusätzlichen Aufgaben KEINE Rückschlüsse auf Klausurthemen gezogen werden können. Es sind wie üblich Zentralübungsaufgaben, welche allgemein zum Wiederholen von Vorlesungsstoff dienen, auch wenn eine Relevanz der Themen dieser Aufgaben in der Klausur natürlich NICHT ausgeschlossen ist.