Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Sommersemester 2009
Abgabe: Freitag, 12. Juni 2009, bis 11:14h im HS 2

Für Aufgabe 44 gibt es diesmal 8 Punkte, für die anderen Aufgaben wie immer je 4 Punkte.

Aufgabe 41. Sei V ein Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V. Durch Induktion nach k beweise man: Sind $v_1, ..., v_k \in V$ Eigenvektoren von ϕ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_k$, so sind die Vektoren $v_1, ..., v_k$ linear unabhängig. Man folgere: Wenn eine $(n \times n)-$Matrix n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist sie diagonalisierbar.

Aufgabe 42. Man zeige, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

nicht normal, aber diagonalisierbar ist. Es gibt also Matrizen, die sich zwar diagonalisieren lassen, aber nicht mit einer unitären Matrix.

Aufgabe 43. Sei ϕ ein Endomorphismus des unitären Vektorraumes V. Man zeige: Der Kern der adjungierten Abbildung ϕ^* ist das Orthokomplement des Bildes von ϕ.

Aufgabe 44. (NB: Für diese etwas längere Aufgabe gibt es 8 Punkte).

(a) Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

ist reell und symmetrisch, also normal. Man finde die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von A und zugehörige normierte Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 und prüfe nach, daß diese Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen.

(b) Ist K die Matrix mit den Spalten v_1, v_2, v_3, so ist also K orthogonal, und $K^t AK$ ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i auf der Diagonalen. Sei e_{ij} die Matrix mit 1 an der Stelle (i, j) und Nullen sonst. Man setze

$$P_i := Ke_{ii}K^t$$

und zeige, dass $P_i v_j = \delta_{ij} v_j$ ist, sodass also P_i den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf den eindimensionalen Raum $< v_i >$ abbildet.

(c) Man zeige ferner, dass

$$P_1 + P_2 + P_3 = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = A$$

sowie

$$P_i^* = P_i = P_i^2 \quad \text{und} \quad P_i P_j = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

ist, und folgere

$$f(A) = \sum_{i=1}^{3} f(\lambda_i)\, P_i \qquad \text{für jedes Polynom } f.$$

(d) Man berechne die P_i für die oben gegebene Matrix A.

Bemerkung: Man nennt die oben berechneten P_1, P_2, P_3 auch die "Spektralschar" von A.

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`