Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Sommersemester 2009
Abgabe: Freitag, 15. Mai 2009, bis 11:14h im HS 2

---

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 21 (Permutationen, Teil 1). Auf allgemeinen Wunsch hier noch etwas Übung im Umgang mit Permutationen:

(a) Schreibe die durch $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 4, \pi(4) = 1$ und $\pi(5) = 2$ gegebene Permutation $\pi$ von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Produkt ziffernfremder Zyklen!

(b) Zeige, dass jede Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ein Produkt von "Nachbartranspositionen" (das sind die Transpositionen $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$) ist!

(c) Zeige, dass sich jede gerade Permutation als Produkt von "Dreierzyklen", d.h. von Zykeln der Form $(i, j, k)$ mit $i \neq j \neq k \neq i$, schreiben lässt!

Aufgabe 22 (Permutationen, Teil 2). Und hier noch zwei weitere Übungsaufgaben zum Rechnen mit Permutationen:

(a) Man zähle alle Untergruppen von $A_4$ (der Gruppe aller geraden Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$) auf!

(b) Zeige, dass der 5-Zyklus $(1, 2, 3, 4, 5)$ und die Transposition $(1, 2)$ zusammen die $S_5$ erzeugen! Zur Diskussion in der Übungsstunde: Verallgemeinerung?

Aufgabe 23. Sei $T$ eine $(2\times 2)$-Matrix mit $T^tT = \mathbf{1}$ und mit Determinante $|T| = -1$. Zeige, dass ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$|a| = 1 \quad \text{und} \quad T = \mathbf{1} - 2aa^t.$$

Zeichne ein Bild, um dieses Ergebnis geometrisch zu veranschaulichen!

Aufgabe 24 (Zwei äquivalente Definitionen der Stetigkeit einer Abbildung). Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen für jede Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ äquivalent sind:

(a) Ist $W$ eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^m$, so ist das Urbild

$$f^{-1}(W) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in W\} \qquad \text{offen im } \mathbb{R}^n.$$

(b) Zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad |x - a| < \delta.$$

Aufgabe 25. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass im Nullpunkt beide partiellen Ableitungen von $f$ existieren, aber $f$ dort nicht stetig ist (um die Unstetigkeit zu zeigen, gebe man eine gegen $(0, 0)$ konvergente Punktfolge an, deren Funktionswerte nicht gegen 0 konvergieren)!

---

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`