Prof. Dr. R. Weissauer
Th. Krämer

Im Folgenden sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine maximale torische Unteralgebra, $\Phi \subset \mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$ das hierzu gehörige Wurzelsystem und $\Phi^+ \subset \Phi$ ein System positiver Wurzeln. Wir arbeiten in dem Ring $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ aller Polynome in den formalen Variablen q^α für $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit der Multiplikation, welche durch $q^\alpha \cdot q^\beta := q^{\alpha+\beta}$ gegeben ist, und betrachten die Derivationen

$$\partial_\alpha : \quad \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*], \;\; q^\beta \mapsto (\alpha, \beta) \cdot q^\beta \qquad \text{für } \alpha \in \mathfrak{h}^*$$

sowie den Differentialoperator $D = \prod_{\alpha \in \Phi^+} \partial_\alpha$ (da die Derivationen ∂_α miteinander kommutieren, spielt die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle).

Aufgabe 40. Die Weyl-Gruppe $W(\Phi)$ operiert auf $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$, indem man $w \cdot q^\alpha := q^{w(\alpha)}$ setzt. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$, $w \in W(\Phi)$ und $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ gilt

$$w \cdot (\partial_\alpha f) = \partial_{w(\alpha)}(w \cdot f) \quad \text{und} \quad w \cdot (D(f)) = sgn(w)\, D(w \cdot f).$$

(b) Die Elemente $A_\beta := \sum_{w \in W(\Phi)} sgn(w) q^{w(\beta)}$ für $\beta \in \mathfrak{h}^*$ erfüllen

$$D(A_\beta) \;\; = \sum_{w \in W(\Phi)} q^{w(\beta)} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} (\beta, \alpha).$$

Aufgabe 41. Wenden Sie die Weyl-Charakterformel auf die triviale eindimensionale Darstellung an, um mit den Notationen aus Aufgabe 40(b)

$$A_\rho \;=\; \prod_{\alpha \in \Phi^+} (q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2}) \quad \text{für} \quad \rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$$

zu sehen. Zeigen Sie hiervon ausgehend: Für jedes $f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ existieren $f_Q \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ mit der Eigenschaft

$$D(f \cdot A_\rho) \;=\; f \cdot D(A_\rho) \;+ \sum_{\varnothing \neq Q \subseteq \Phi^+} f_Q \cdot \prod_{\alpha \in Q} (q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2}),$$

wobei die Summe sich über alle nichtleeren Teilmengen Q von Φ^+ erstreckt.

Aufgabe 42. Sei V eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ vom Höchstgewicht $\chi \in \mathfrak{h}^*$ und $f = ch(V) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$ der entsprechende Charakter. Dann ist $f \cdot A_\rho = A_{\rho+\chi}$ wegen der Weyl-Charakterformel. Folgern Sie hieraus die Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{C}}(V) \;=\; \prod_{\alpha \in \Phi^+} \frac{(\chi + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}\,.$$

Hinweis: Vergleichen Sie die Resultate aus den Aufgaben 40(b) und 41, und wenden Sie den durch $q^\alpha \mapsto 1$ für alle $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ gegebenen Homomorphismus $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*] \longrightarrow \mathbb{Z}$ an.

Die Übungsblätter zur Vorlesung über Lie-Algebren gibt es auch auf

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/LieAlgebren/`