Aufgabe 1 (Vollständige Durchschnitte). Eine m-dimensionale Untervarietät $X \subset \mathbb{P}^n$ heißt *vollständiger Durchschnitt*, wenn die Idealgarbe $\mathscr{I}_X = \{ f \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} : f|_X \equiv 0 \}$ durch $n-m$ homogene Polynome erzeugt werden kann. Zeigen Sie:

(a) Ist $X \subset \mathbb{P}^n$ ein glatter vollständiger Durchschnitt und $\mathscr{I}_X = (f_1, \ldots, f_{n-m})$ erzeugt von homogenen Polynomen $f_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i))$ vom Grad d_i, dann gilt die Adjunktionsformel

$$K_X \simeq \big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1 + \cdots + d_{n-m} - (n+1)\big)|_X.$$

(b) Die Kurve $X = \{[s^3 : s^2t : st^2 : t^3] \mid (s,t) \neq (0,0)\} \subset \mathbb{P}^3$ ist mengentheoretisch ein Schnitt zweier Hyperflächen, sie ist aber kein vollständiger Durchschnitt.

Aufgabe 2 (Kubische Flächen). Um zu sehen, dass eine generische Kubik $S \subset \mathbb{P}^3$ rational ist, kann man folgendermaßen vorgehen.

(a) Zeigen Sie, dass die Fermat-Kubik $S = V(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ genau 27 projektive Geraden $\ell \subset \mathbb{P}^3$ enthält, und beschreiben Sie diese. Für die Rechnung können Sie benutzen, dass bis auf Permutation der Koordinaten jede Gerade die Form $\ell = V(x_2 - a_0x_0 - a_1x_2) \cap V(x_3 - b_0x_0 - b_1x_1)$ mit Konstanten a_i, b_i hat.

(b) Betrachten Sie den projektiven Raum $P = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(3)))$ der Kubiken in $\mathbb{P}^3$ und die Grassmann-Varietät $G = Gr(2,4)$, die Geraden in $\mathbb{P}^3$ parametrisiert. Dann ist

$$Z = \big\{ (S, \ell_1, \ell_2) \mid \ell_1, \ell_2 \subset S \text{ und } \ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing \big\} \subset P \times G \times G$$

eine lokal abgeschlossene Untervarietät. Zeigen Sie, dass die Projektion $Z \to G \times G$ dominant ist und dass $\dim(Z) = \dim(P)$ gilt. Folgern Sie mittels (a), dass die Projektion $Z \to S$ generisch endlich und dominant ist.

(c) Für eine generische kubische Fläche $S \subset \mathbb{P}^3$ zeigt (b), dass Geraden $\ell_1, \ell_2 \subset S$ mit $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ existieren. Konstruieren Sie hiervon ausgehend eine birationale Abbildung

$$\varphi : \quad \ell_1 \times \ell_2 \dashrightarrow S$$

und überlegen Sie sich, auf welchen offenen Teilmengen φ und φ^{-1} definiert sind.