Fourierreihen

Timo Dimitriadis

04.05.2009

In diesem Vortrag geht es im praktischen Sinne um die Analyse von Schwingungsvorgängen, wie sie zum Beispiel in der Physik häufig vorkommen. Oft mag es nützlich sein, diese durch eine Superposition von elementaren Sinus- und Cosinus-Schwingungen zu beschreiben falls dies möglich ist. Dazu verwendet man eine Funktion $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \cdots + (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

mit gewissen Konstanten a_ν, b_ν.
Es stellen sich nun die Frage, für welche Funktionen diese Reihe gegen die Funktion konvergiert und ob diese und somit die Konstanten a_ν, b_ν eindeutig bestimmt sind. Dazu kann man sich noch fragen, ob die Konvergenz punktweise oder gar gleichmäßig oder absolut ist.
Der vorangehende Vortrag beschäftigte sich schon mit diesem Thema, jedoch für glatte Funktionen. Ich werde mich mit einer größeren Klasse von Funktionen, der der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen beschäftigen. Ich benutze hier einige "Vorraussetzungen" die der letzte Referent schon eingefürt und bewiesen hat, wie z.B. Konvergenzbedingungen für Funktionen $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ oder die Exponentialschreibweise für Sinusfunktionen.
Ebenso verzichte ich auf eine erneute "Herleitung" der folgenden Definitionen.

Definition:

ν-ter Fourierkoeffizient:

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} \mathrm{d}t \qquad \nu \in \mathbf{Z}$$

n-tes Fourierpolynom:

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$$

Fourierreihe:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

Def: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ heißt stückweise glatt, falls es eine Partition $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt und falls es 1 mal stetig differenzierbare Funktionen $f_\nu : [a_{\nu-1}, a_\nu] \to \mathbf{C}$ gibt, sodass $f(x) = f_\nu(x)$ für $x \in (a_{\nu-1}, a_\nu)$ gilt. $(1 \leq \nu \leq n)$

Wir beginnen damit, dass wir eine Integraldarstellung für $S_n(x)$ herleiten, um danach dann mit Hilfe dieser Darstellung ein Konvergenzkriterium aufstellen zu können.

Betrachten wir nun die Reihe $T_n(y)$

$$T_n(y) := \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu y} = \sum_{\mu=0}^{2n} e^{i(\mu-n)y} = e^{-iny} \sum_{\mu=0}^{2n} e^{i\mu y}$$

mit der aus Analysis I bekannten Formel

$$\sum_{j=1}^{n} a^{j-1} = \frac{1-a^n}{1-a} \qquad \text{für } a \neq 1 \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

ergibt sich:

$$T_n(y) = e^{-iny} \frac{1-(e^{iy})^{2n+1}}{1-e^{iy}} = e^{-iny} \frac{1-e^{i(2n+1)y}}{1-e^{iy}} \qquad \text{für } y \neq 2\pi k \quad k \in \mathbf{Z}$$

Indem wir e^{-iny} mit in den Bruch schreiben, dann mit $e^{-i\frac{y}{2}}$ erweitern, dies vereinfachen und schliesslich die Definition des Sinus einsetzen, ergibt sich

$$T_n(y) = \frac{(e^{-iny} - e^{i(n+1)y})e^{-i\frac{y}{2}}}{(1-eiy)e^{-i\frac{y}{2}}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})y} - e^{i(n+\frac{1}{2})y}}{e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}}} = \frac{\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})y} - e^{i(n+\frac{1}{2})y}}{2i}}{\frac{e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}}}{2i}}$$

$$= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{1}{2}y)} \; .$$

Andererseits ist

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} = \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} \mathrm{d}t \, e^{i\nu x} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu(x-t)} \mathrm{d}t \; .$$

Setzt man nun

$$T_n(x-t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu(x-t)} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(x-t))}{\sin(\frac{1}{2}(x-t))}$$

in $S_n(x)$ ein, erhält man

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(x-t))}{\sin(\frac{1}{2}(x-t))} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_\pi^{2\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \; .$$

Bei dieser Substitution müssen die Grenzen nicht geändert werden, da die Funktion 2π-periodisch ist und es somit egal ist über welches Intervall der Länge 2π wir integrieren.

Durch Substitution $t \to -t$ im zweiten Integral und anschliessend $t \to 2t$ in beiden erhält man:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-2\pi} f(x-t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(-t))}{\sin(-\frac{1}{2}t)}(-1)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x-t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\cdot 2\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\cdot 2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$$

Nach diesen, teils auch nur kosmetischen Umformungen können wir nun ein Kriterium für die Konvergenz der Fourierreihe formulieren:

Kriterium: Die Fourierreihe von $f(x)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $S_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert und der Grenzwert der Folge ist der Funktionswert der Fourierreihe an der Stelle x.

Integrale in der Form werden als Dirichlet-Integrale bezeichnet.
Betrachte nun das spezielle Dirichlet-Integral:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x_0)\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}f(x_0)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}f(x_0)\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}f(x_0)\int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}f(x_0)\left(\int\limits_0^{\pi} e^{i0t}\mathrm{d}t + \int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu t}\mathrm{d}t + \int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} e^{i(-\nu)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{\pi}f(x_0)\left(\int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu t} + e^{i(-\nu)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{\pi}f(x_0)\left(\int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\cos(\nu t)+\cos(-\nu t)+i\sin(\nu t)+i\sin(-\nu t)\right]\mathrm{d}t\right)$$

$$= f(x_0)+\frac{1}{\pi}f(x_0)\left(\int\limits_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}2\cos(\nu t)\mathrm{d}t\right) = f(x_0)+\frac{1}{\pi}f(x_0)\left(2\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\nu}\sin(\nu t)\right]_0^{\pi}\right) = f(x_0)$$

Wenn wir nun also $S_n(x_0) - f(x_0)$ bilden, können wir $f(x_0)$ in das Integral mit hineinziehen und können folgenden Satz formulieren:

Satz: Die Fourierreihe von f konvergiert genau dann an der Stelle x_o gegen $f(x_o)$, wenn die Folge

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2} - f(x_0)\right)\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t$$

eine Nullfolge ist.

Wir werden nun versuchen eine möglichst große Klasse von Funktionen zu konstruieren, für die dieses Kriterium erfüllt ist.
Dazu ist der folgende Hilfssatz sehr nützlich, auf ihm werden alle restlichen Betrachtungen aufbauen. Er wird oft auch Riemann-Lebesgue-Lemma genannt.

Hilfssatz: Sei $f : [a, b] \to \mathrm{C} \quad a < b$ eine Regelfunktion.
Die beiden Folgen

$$\int\limits_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int\limits_a^b f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

konvergieren gegen Null für $n \to \infty$

Beweis: Die Idee bei diesem Beweis ist, ihn in 3 Teile aufzuteilen. Zuerst wird die Behauptung für konstante Funktionen gezeigt, dies dann auf Treppenfunktionen ausgeweitet und schliesslich kann man dadurch die Behauptung auch für Regelfunktionen zeigen.
Ich werde den Beweis hier nur für $\int\limits_a^b f(x)e^{inx}\mathrm{d}x$ zeigen.

Der Beweis für $\int\limits_a^b f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$ geht völlig analog.

(I) Sei $f(x) = c$ konstant:

$$\int_a^b c \cdot e^{inx} \mathrm{d}x = \int_a^b c(\cos(nx) + i \sin(nx)) \mathrm{d}x = \int_a^b c \cos(nx) \mathrm{d}x + i \int_a^b c \sin(nx) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{c}{n} \sin(nx)\right]_a^b + i \left[-\frac{c}{n} \cos(nx)\right]_a^b = \frac{c}{n}(\sin(nb) - \sin(na)) + i \frac{c}{n}(\cos(nb) - \cos(na))$$

$$\to 0 \quad \text{für } n \to \infty \quad \text{da} |\sin(nx)| \leq 1 \text{ und } |\cos(nx)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathrm{R}$$

(II) Sei $f(x)$ eine Treppenfunktion:
Dies lässt sich unmittelbar auf den Fall(I) zurückführen, da Treppenfunktionen aus endlich vielen konstanten Funktionen zusammengesetzt sind.

(III) Sei f(x) nun eine Regelfunktion:
Sei $\epsilon > 0$
Da f nun eine Regelfunktion ist, kann sie gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden.
$\Longrightarrow$ Es existiert eine Treppenfunktion $g(x)$ mit:

$$|\int_a^b f(x) e^{inx} \mathrm{d}x| \leq |\int_a^b g(x) e^{inx} \mathrm{d}x| + |\int_a^b (f(x) - g(x)) e^{inx} \mathrm{d}x|$$

$$\leq |\int_a^b g(x) e^{inx} \mathrm{d}x| + \int_a^b |(f(x) - g(x))| \underbrace{|e^{inx}|}_{=1} \mathrm{d}x := (1)$$

Zum einen gilt

$$|\int_a^b g(x) e^{inx} \mathrm{d}x| \leq \epsilon$$

,da $g(x)$ eine Treppenfunktion ist und somit gegen Null konvergiert.

Andererseits ist auch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \leq (b - a) \ |f(x) - g(x)| \leq (b - a)\epsilon$$

, da $f(x)$ gleichmäßig gegen $g(x)$ konvergiert.

$$\Rightarrow (1) \leq \epsilon + (b-a)\epsilon = C\epsilon$$

Also ist der Hilfssatz nun auch für jede Regelfunktion bewiesen.
Zusatz: Auch

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

konvergiert gegen Null, für $n \to \infty$ da

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Wir können nun versuchen, diesen Hilfssatz auf die Funktion

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$$

$$\text{mit} \quad g(t) = \frac{f(x_0+2t) + f(x_0-2t) - 2f(x_0)}{2\sin t}$$

anzuwenden.
Die Funktion ist jedoch an der Stelle $t = 0$ nicht definiert und muss nicht einmal in den Nullpunkt hinein stetig fortsetzbar sein.
Wir können g(t) hier aber durch eine etwas leichtere Funktion ersetzen:
Die Funktion

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t \cdot \sin t},$$

die in $(0, \pi/2]$ definiert und stetig ist, kann man in den Punkt $t = 0$ stetig fortsetzen.
Anschaulich mag das klar sein, da $\sin t$ und t für $t \to 0$ fast gleich sind, bewiesen werden kann dies mathematisch aber auch leicht mithilfe der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{sint - t}{t\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{1\sin t + t\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2\cos t - t\sin t} = \frac{0}{2} = 0$$

Wir können also statt $g(t)$ genauso gut die Funktion

$$h(t) := \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{2t} \quad \text{verwenden.}$$

Zusammenfassend können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz: Sei $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ eine Regelfunktion mit der Periode 2π. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

(I) $$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x_0} \quad \text{mit} \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-i\nu t}\mathrm{d}t$$

(II) Die Folge der Dirichlet-Integrale ($n \in \mathrm{N}$)

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{2t}\right)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$$

ist eine Nullfolge.

Wenn wir jetzt die Funktion

$$h(t) = \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{2t}$$

betrachten, fällt sofort auf, dass h(t) in der Nähe von $t = 0$ nicht unbedingt beschränkt sein muss. Wenn jedoch die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist, so bildet der Grenzwert von $h(t) \to 0$ eine Ableitung und somit kann man $h(t)$ stetig in $t = 0$ hinein fortsetzen. Also ist dann $h(t)$ auch eine Regelfunktion auf $[0, \pi/2]$ und wir können den Hilfssatz darauf anwenden.
Betrachten wir nun stückweise glatte Funktionen, die unter anderem Unstetigkeitsstellen haben können. Als weiter Vorraussetzung fordern wir noch, dass für alle $x_0 \in D$ gilt:

$$f(x_0) = \frac{\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0+t) + \lim\limits_{t\to 0^-} f(x_0+t)}{2}$$

Das heißt die einseitigen Grenzwerte existieren auch in den Unstetigkeitsstellen, und somit gilt:

$$\tilde{h}(t) = \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}$$

$$= \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0+t)\ -\ \lim\limits_{t\to 0^-} f(x_0+t)}{t}$$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{t\to 0} h(t)$ und man kann $h(t)$ auch in den Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ stetig in den Nullpunkt hinein fortsetzen. Also bildet $h(t)$ auch eine Regelfunktion auf $[0, 2\pi]$.
Somit können wir das abschliessende Theorem, auf das wir hingearbeitet haben, formulieren:

Theorem:
Vorraussetzungen:
f stückweise glatt +

$$f(x_0) = \frac{\lim\limits_{t\to 0^+} f(x_0+t)\ +\ \lim\limits_{t\to 0^-} f(x_0+t)}{2}$$

Behauptung:
Für stückweise glatte Funktionen f konvergiert die Fourierreihe in jedem Punkt. Die Fourierreihe stelle die Funktion in allen Punkten dar, in denen die Funktion stetig ist. In den Sprungstellen stellt sie das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten dar.

Beweis:
Als Beweis müssen wir nun nur noch die Funktion

$$h(t) = \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{2t}\ ,$$

von der wir nun wissen, dass sie in allen Punkten x_0 eine Regelfunktion auf $[0, 2\pi]$ darstellt auf den Hilfssatz anwenden. Daraus folgt dann, dass

$$J_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{2t}\right)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$$

eine Nullfolge ist.

Das ist nun nach obrigem Satz gleichbedeutend damit, dass die Fourierreihe gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert und somit ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} \quad \text{mit} \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} \mathrm{d}t$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $f(x)$. $\square$

Wir bemerken natürlich sofort dass Fourierreihen im Allgemeinen nicht gleichmäßig konverieren können, sonst könnten Fourierreihen keine Funktionen mit Sprungstellen darstellen.
Desweiteren sei noch angemerkt, dass es stetige Funktionen gibt, für die die Fourierreihe nicht in allen Punkten konvergiert. Es wird also wohl kein Kriterium geben für die Konvergenz von Fourierreihen, das nur auf die Stetigkeit der Funktion zurückgreift. Konvergenzbetrachtungen für manche Fourierreihen können sehr schwierig sein und benötigen gesonderte Betrachtungen.

Quellen:

Eberhard Freitag: Vorlesungen ber Analysis Teil I