Differentialgeometrie

Inhalt

Kapitel I. Riemannsche Gebiete

1. Differentialrechnung

Wir setzen die Differentialrechnung reeller Funktionen mehrerer Variabler voraus und stellen nur einige grundlegende Eigenschaften zusammen:

Eine Funktion
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \text{ offen},$$
heißt k-fach stetig differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^k(D)$ die Menge all dieser Funktionen. Hierbei sind $k = 0$ und $k = \infty$ eingeschlossen, $\mathcal{C}^0(D) = \mathcal{C}(D)$ bezeichne die Menge der stetigen Funktionen und $\mathcal{C}^\infty(D)$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen. Im Falle $n = 1$ kann man als Definitionsbereiche neben offenen Mengen auch beliebige Intervalle (offene, abgeschlossene, halboffene) zulassen.

Sei allgemeiner $X \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge. Eine Abbildung $f : D \to X$ kann man in ihre m Komponenten zerlegen,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad f_i : D \to \mathbb{R} \ (1 \le i \le n).$$

Man bezeichnet mit $\mathcal{C}^k(D, X)$ die Menge aller Abbildungen, deren Komponenten in $\mathcal{C}^k(D)$ enthalten sind.

Wir bezeichnen die Matrix der partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $a \in X$ mit
$$J(f, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (a).$$
Wir erinnern an die Kettenregel: Sind

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \ V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen}, \ X \subset \mathbb{R}^p,$$

$\mathcal{C}^k$-Abbildungen , so ist auch ihre Zusammensetzung eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und es gilt im Falle $k \geq 1$

$$J(g \circ f, a) = J(g, f(a)) \cdot J(f, a) \quad \text{(Matrizenprodukt).}$$

Wir erinnern auch an den Satz für umkehrbare Funktionen: Sei

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

eine $\mathcal{C}^k$-Funktion ($k \geq 1$) und $a \in U$ ein Punkt, für den die Funktionalmatrix $J(\varphi, a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung $a \subset U \subset D$, so daß ihr Bild $V = \varphi(U)$ ebenfalls offen ist und so daß die Einschränkung von φ einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomomeorphismus

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$$

vermittelt. (Der Bequemlichkeit halber verwenden wir für die Einschränkung von φ denselben Funktionsbuchstaben φ, solange klar ist, was gemeint ist.) Unter einem $\mathcal{C}^k$-Diffemomeorphismus versteht man natürlich eine bijektive Abbildung zwischen offenen Teilen des $\mathbb{R}^n$, welche in beiden Richtungen $\mathcal{C}^k$-differenzierbar ist.

Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^k$-Abbildung, so daß $V := \varphi(U)$ offen ist und so daß φ einen $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $U \to V$ induziert, so nenne man φ auch eine *offene Einbettung* (im $\mathcal{C}^k$-Sinne).

Der Satz für implizite Funktionen ist hiervon eine Verallgemeinerung (kann aber leicht aus dem Satz für umkehrbare Funktionen abgeleitet werden).

Eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ($k \geq 1$)

$$\alpha : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

heißt *Immersion* in einem Punkt $a \in D$, falls die Jacobimatrix $J(\alpha, a)$ den Rang n hat. Dann ist notwendig $n \leq m$. Beispiele von Immersionen sind offene Einbettungen. Ein anderes Beispiel ist die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \longmapsto (x, 0).$$

Der Satz für implizite Funktionen besagt, daß man im Prinzip damit schon alle Immersionen kennt. Um den Satz zu formulieren, führen wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Quadrupel (U, V, φ, a) ein. Hierbei seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teile, $\varphi : U \to V$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und $a \in X$ ein Punkt. Zwei solche Quadrupel (U, V, φ, a), (U', V', φ', a') mögen äquivalent heißen, falls es offene Umgebungen $a \in U_0 \subset U$, $\varphi(a) \in V_0 \subset U_0$ und entsprechend $a' \in U_0' \subset U'$, $\varphi(a') \in V_0' \subset U_0'$ sowie $\mathcal{C}^k$-Diffemomorphismen $U_0 \to U_0'$ und $V_0 \to V_0'$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\varphi} & V_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_0' & \xrightarrow{\varphi'} & V_0' \end{array}$$

kommutativ ist. Mit dieser ad-hoc-Definition läßt sich der Satz für implitzite Funktionen folgendermaßen formulieren

Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine Immersion bei a. Diese ist äquivalent zu dem Quadrupel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \iota, 0)$, wobei ι die Abbildung $\iota(x) = (x, 0)$ (Anhängen von Nullen) bezeichne.

Diffeomorphismen haben manchmal die Bedeutung einer (krummlininigen) Koordinatentransformation. Man kann den Satz für implizite Funktionen daher etwas vage aber schlagend wie folgt aussprechen:

Eine Immersion $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in D$ sieht in der Nähe von a nach Koordinatentransformationen geeigneter offener Umgebungen von a und $\alpha(a)$ aus wie die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \longmapsto (x, 0).$$

2. Riemannsche Gebiete

Der Einfachheit halber wollen wir den Begriff „differenzierbar“ immer im $\mathcal{C}^\infty$-Sinne verstehen. Vieles geht natürlich unter schwächeren Bedingungen.

2.1 Definition. *Ein pseudoriemannsches Gebiet (D, g) ist eine Paar, bestehend aus einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen $n \times n$-Matrix* DpR

$$g = (g_{ik})_{1 \le i,j \le n}$$

differenzierbarer Funktionen auf D, so daß $g(x)$ für jedes x nicht ausgeartet ist. Wenn die Matrix $g(x)$ für jedes $x \in D$ positiv definit ist, so heißt (D, g) ein Riemannsches Gebiet.

Eine symmetrische reelle Matrix S heißt bekanntlich positiv definit, falls

$$S[x] := \sum_{i,j} s_{ij} x_i x_j$$

für alle $x \neq (0, \ldots, 0)$ positiv ist. In Matrixschreibweise gilt

$$S[x] = x' S x, \qquad x = \text{Spaltenvektor}.$$

Die Determinante einer positive definiten Matrix ist stets positiv.

Zur Motivation erinnern wir an den Begriff des n-dimensionalen Flächenstücks im $\mathbb{R}^m$: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^m$ heißt n-dimensionales Flächenstück, falls es eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung (Parametrisierung) $\alpha : D \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\alpha : D \to X$ ist topologisch (bijektiv und stetig in beiden Richtungen),
2. α ist differenzierbar und die Funktionalmatrix $J(\alpha, a)$ hat für jedes $a \in D$ Rang n.

Man nennt α auch eine reguläre Parametrisierung des Flächenstücks X.

Für ein solches (parametrisiertes) Flächenstück betrachtet man die $n \times n$-Matrix

$$g(x) = J(\alpha, x)' J(\alpha, x).$$

Diese ist symmetrisch und positiv definit, (D, g) ist also ein Riemannsches Gebiet. Die Bedeutung von g liegt darin, daß die innere Geometrie von X in Termen von g ausgedrückt werden kann. Das einfachste Beispiel ist die Bogenlänge einer glatten (= differenzierbaren) Kurve

$$u : I \longrightarrow X, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall.}$$

Man betrachtet anstelle von u

$$v : I \longrightarrow D, \quad v(x) = u(\alpha(x)).$$

Die Bogenlänge von u ist

$$l(u) = \int_I \sqrt{\dot{u}_1(t)^2 + \cdots + \dot{u}_m(t)^2}\, dt.$$

Mittels der Jacobimatrix

$$J(u, t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$$

schreibt sich dies in der Form

$$l(u) = \int_0^1 \sqrt{J(u, t)' J(u, t)}\, dt.$$

Wendet man die Kettenregel auf $u = \alpha \circ v$ and, so folgt

$$J(u, t)' J(u, t) = J(v, t)' J(\alpha, v(t))' J(\alpha, v(t)) J(v, t) = g(v(t))[J(v, t)].$$

Die Formel für die Bogenlänge in Parameterdarstellung ist also

$$l(u) = l_g(v) := \int_I \sum_{1 \le i, j \le n} \sqrt{g_{ij}(v(t)) \dot{v}_i(t) \dot{v}_j(t)}\, dt.$$

Dies gibt Anlaß zu der

2.2 Definition. *Sei (D,g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Die Bogenlänge einer glatten Kurve $u : I \to D$ ist* DbO

$$l_g(u) := \int_I \sqrt{\sum_{1\le i,j\le n} g_{ij}(u(t))\dot u_i(t)\dot u_j(t)}\,dt.$$

Miit Hilfe des Satzes für implizite Funktionen kann man zeigen:

2.3 Hilfssatz. *Sind $\alpha : D \to X$, $\beta : \tilde D \to X$ zwei verschiedene reguläre Parametrisierungen ein und desselben Flächenstücks, so ist* vPD

$$\gamma := \beta\circ\alpha^{-1} : D \longrightarrow \tilde D$$

ein Diffeomorphismus. Es gilt

$$g(x) = J(\gamma,x)'\tilde g(\gamma(x))J(\gamma,x).$$

Dies legt folgende Definition nahe:

2.4 Definition. *Eine Isometrie zwischen zwei pseudoriemannschen Gebieten (D,g), $(\tilde D,\tilde g)$ ist ein Diffeomorphismus $\varphi : D \longrightarrow \tilde D$ mit der Eigenschaft* DgI

$$g(x) = J(\varphi,x)'\tilde g(\varphi(x))J(\varphi,x).$$

Man verifiziert nun leicht in dieser allgemeinen Situation:

2.5 Bemerkung. *Ist $\varphi : (D,g) \to (\tilde D,\tilde g)$ eine Isometrie pseudoriemannscher Gebiete, so bleiben Bogenlängen erhalten: Ist also $u : I \to D$ eine glatte Kurve und $\tilde u = \varphi\circ u$ ihre Bildkurve, so gilt* BiK

$$l_g(u) = l_{\tilde g}(\tilde u).$$

3. Geodätische

Gedodätische auf Flächenstücken sind Kurven, welche wenigstens lokal kürzeste Verbindungen darstellen. Bekanntlich sind dies im Falle der üblichen Euklidischen Geometrie genau die Geradengleichungen $u(t) = at + b$, welche man auch einfach durch

$$\ddot u = 0$$

charakterisieren kann. Da wir uns um Elementargeometrie nicht kömmern wollen, erheben wir dies zur Definition:

3.1 Definition. *Sei (D,g) ein Riemannsches Gebiet, $g(x)$ sei für jedes $x \in D$ die Einheitsmatrix. Eine glatte Kurve* DeI

$$u : I \longrightarrow D, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall}$$

*heißt **geodätisch**, falls $\ddot{u} = 0$ gilt.*

Zum Aufwärmen wollen wir die Differentialgleichung $\ddot{u} = 0$ auf krummlinige Koordnaten umtransformieren.

3.2 Definition. *Ein Riemannsches Gebiet (D,g) heißt **flach**, falls es isometrisch zu einem Gebiet $(\tilde{D},\tilde{g})$ ist, wobei $\tilde{g}(x)$ für jedes x die Einheitsmatrix ist.* DrF

Ist $\varphi : D \to \tilde{D}$ eine solche Isometrie, so gilt also

$$g(x) = J(\varphi,x)'J(\varphi,x).$$

Wir betrachten nun eine Kurve $u : I \to D$, so daß die in $\tilde{D}$ transformierte Kurve $v(t) = \varphi(u(t))$ der Bedingung $\ddot{v} = 0$ genügt. Einmaliges Ableiten (mit Hilfe der Kettenregel) ergibt:

$$\dot{v}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\,\dot{u}_i$$

und nochmaliges Ableiten (mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel)ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\,\ddot{u}_i + \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\,\dot{u}_\mu\,\dot{u}_\nu = 0$$

für die umtransformierte Geradengleichung. Uns ist daran gelegen, diese Formel so umzuformen, daß anstelle φ nur noch die Matrix g auftritt. Wir erinnern an die Definition von g:

$$g_{ij} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}.$$

Multipliziert man die vorhergehende Gleichung mit $\partial\varphi_k/\partial x_j$ und summiert man anschließend über k, so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}\,\ddot{u}_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\,\dot{u}_\mu\,\dot{u}_\nu = 0$$

oder etwas anders geschrieben

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\,\ddot{u}_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_{ij}^k\,\dot{u}_i\,\dot{u}_j = 0 \quad \text{mit} \quad H_{ij}^k = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Die Funktionen H_{ij}^k kann man in der Tat durch g ausdrücken. Es gilt nämlich

$$H_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right],$$

wie man durch Nachrechnen bestätigt.

Wir formulieren die Differentialgleichung noch ein wenig um, indem wir die inverse Matrix g^{-1} einführen. Es ist üblich, ihre Komponenten mit g^{ij} zu bezeichnen. Es gilt also

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein einfache Umformung der Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} g^{k\nu}\left[\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu}\right].$$

Damit haben wir tatsächlich die Differentialgleichung so umformen können, daß nur noch g eingeht. Diese Differentialgleichung wurde unter der Annahme abgeleitet, daß (D, g) flach ist. Sie ist jedoch auch sinnvoll für nicht flache Gebiete. Damit werden die folgenden beiden Definitionen nahegelegt, welche noch weitere Rechtfertigung erfahren werden.

3.3 Definition. *Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Die **Christoffelsymbole** sind* DcS

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} g^{k\nu}\left[\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu}\right].$$

3.4 Definition. *Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Eine glatte Kurve* HdG
*$u : I \to D$ heißt **geodätisch**, wenn sie der Differentialgleichung*

$$\ddot{u}_k + \sum_{ij}^{k} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0$$

genügt.

Im Falle der „Euklidischen Metrik", $g(x) = E$ =Einheitsmatrix, verschwinden die Christoffelsymbole und man erhält die Geradengleichung $\ddot{u} = 0$.

3.5 Bemerkung. *Sei $\varphi : (D,g) \to (\tilde{D},\tilde{g})$ eine Isometrie. Dann gilt für die* CrI
Christoffelsymbole folgende Umsetzungsformel:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j}\,\Gamma^j_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_\nu}\,\tilde{\Gamma}^k_{ij}(\varphi(x)).$$

Da die Funktionalmatrix $(\partial\varphi_k/\partial x_j)$ invertierbar ist, kann man diese Formel auch nach Γ^k_{ik} auflösen, wenn man will. Bevor wir den Beweis kommentieren, formulieren wir noch

3.6 Bemerkung. *Sei $(D,g) \to (\tilde{D},\tilde{g})$ eine Isometrie. Eine glatte Kurve* IsG
$u : I \to D$ ist genau dann geodätisch, wenn $\tilde{u} = u \circ \varphi$ geodätisch ist.

Zu den Beweisen von 3.5 und 3.6 : Man kann zunächst 3.5 und anschließend 3.6 stur nachrechnen. Diese Rechnung ist allerdings sehr mühselig. Wir skizzieren nur kurz den Weg, wie man 3.5 nachrechnet und geben im Anschluß einen viel natürlicheren Beweis an, der allerdings den Nachteil hat, daß Dinge benutzt werden, die erst noch entwickelt werden.

Direkter Beweis von 3.5 (Skizze): Da in der Definition der Christoffelsymbole die inverse Matrix von g eingeht, ist es zweckmäßig, die Formel zunächst mit $g_{j\alpha}\tilde{g}_{k\beta}$ zu multiplizieren und über j und k zu summieren. Danach hat man eine (äquivalente) Formel, in die nur noch g, $\tilde{g}$ und φ sowie partielle Ableitungen dieser Ausdrücke eingehen. Danach benutzt man

$$g_{ij}(x) = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\mu(x)}{\partial x_i}\;\tilde{g}_{ij}(\varphi(x))\;\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_\nu}.$$

Man differenziert diese Formel unter Ausnutzung von Produkt- und Kettenregel und erhält dann eine zu 3.5 äquivalente Formel, in die $\tilde{g}$ und φ sowie partielle Ableitungen dieser Ausdrücke eingehen. Diese recht längliche Formel ist dann Term für Term zu verifizieren. □

Direkter Beweis von 3.6 (Skizze): Man transformiert die Geodätengleichung von D auf $\tilde{D}$ mittels 3.5 . □

Natürlichere Beweise von 3.5 und 3.6 : Man fängt besser mit 3.6 an. Im nächsten Abschnitt geben wir eine Charakterisierung Geodätischer als Lösung eines Variationsprobles an (4.6). Es ist unmittelbar klar, daß 3.6 hieraus folgt. Um 3.5 zu beweisen, genügt es danach folgendes zu zeigen: Die Christoffelsymbole Γ^k_{ij} sind durch die Geodätischen eindeutig bestimmt. Ist also ${\Gamma'}^k_{ij}$ ein System von Funktionen, so daß alle Lösungen von $\ddot{u}_k + \sum_{ij}^k \Gamma^k_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j$ derselben Gleichung mit Γ' anstelle von Γ genügen, so gilt $\Gamma = \Gamma'$. Es ist klar, daß man dies beweisen kann, wenn die Existenz genügend vieler Geodäten gesichert ist, in der Tat leistet der im übernächsten Abschnitt bewiesen Existenzsatz 5.1 das Gewünschte. □

Bemerkung 3.6 legt folgende Definition von Geodätischen auf Flächenstücken nahe:

3.7 Definition. *Eine Kurve $u : I \to X$ auf einem parametrisierbaren Flächenstück heißt geodätsich, falls es eine Parametrisierung $\alpha : D \to X$ gibt, so $u \circ \alpha^{-1}$ in dem Riemannschen Gebiet (D, g), $g(x) = J(\alpha, x)' J(\alpha, x)$ geodätisch ist.* DgF

Bemerkung 3.6 besagt nun gerade:

3.8 Bemerkung. *Der Begriff der Geodätischen auf einem Flächenstück hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.* BgN

4. Geodätische als Lösung eines Variationsproblems

Sei $u : I \to (D, g)$ eine glatte Kurve in einem Riemannschen Gebiet. Man nennt

$$\sum_{1 \le i,j \le n} g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t).$$

die Geschwindigkeit von u zum Paramterwert t.

4.1 Definition. *Eine glatte Kurve $u : I \to (D, g)$ in einem Riemannschen Gebiet heißt **regulär parametrisiert**, falls ihre Geschwindigkeit überall von 0 verschieden ist und **natürlich parametrisiert**, falls ihre Geschwindigkeit konstant ist.* DrP

Die erste Bedingung hängt gar nicht von der Metrik g ab, sie besagt wegen der positiven Definitheit von g einfach, daß $\dot{\alpha}(t)$ für alle t von 0 verschieden ist. Die Bedingung der natürlichen Parametrisierung hängt sehr wohl von der Metrik ab.

4.2 Hilfssatz. *Sei $u : I \to (D, g)$ eine regulär parametrisierte Kurve in einem Riemannschen Gebiet. Wir wählen einen festen Punkt $t_0 \in I$. Die Funktion* RnP

$$\tau(t) := \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(u(t))\, \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t)}\, dt$$

ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall I diffeomorph auf ein anderes Intervall J ab. Die Kurve

$$v : J \longrightarrow (D, g), \quad v(t) = u(\tau^{-1}(t))$$

ist natürlich parametrisiert.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist τ differenzierbar und die Ableitung ist der Integrand, also inbesondere positiv. Die Funktion ist daher streng monoton und daher injektiv. Das Bild von τ ist nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ein Intervall. Die Umkehrabbildung ist nach dem Satz für umkehrbare Funktionen differenzierbar. Der Rest ist klar. □

In üblicher Sprechweise nennt man τ eine Parametertransformation. Der Hilfssatz sagt also aus, daß jede regulär parametrisierte Kurve nach einer geeigneten Paramatertransformation natürlich parametrisiert ist. Der Vollständigkeit halber erinneren wir an den Begriff der Parametertransformation:

Zwei Kurven $\alpha : I \to D$, $\beta : J \to D$ heißen ***parameteräquivalent****, falls es einen Diffemorphismus $\tau : I \to J$ mit der Eigenschaft $\beta \circ \tau = \alpha$ gibt. Der Diffeomorphismus ist entweder streng monoton wachsend oder fallend. Ist er streng monoton wachsend, so nennt man α und β* ***streng parameteräquivalent****.*

Ein einfache Anwendung der Substitutionsregel für Integrale zeigt:

4.3 Bemerkung. *Äquivalente Kurven in einem Riemannschen Gebiet haben dieselbe Boganlänge.* AeL

Für viele Fragen ist es ausreichend, natürlich parametrisierte Kurven zu betrachten:

4.4 Bemerkung. *Gedodätische in Riemannschen Gebieten sind natürlich parametrisiert.* GnP

Beweis: Man hat zu zeigen, daß

$$\frac{d}{dt}\sum_{ij} g_{ij}(u(t))\ \dot u_i(t)\dot u_j(t) = \sum_{ij\nu}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu}\dot u_\nu \dot u_i \dot u_j + 2\sum_{ij} g_{ij}\ddot u_i \dot u_j$$

konstant ist. Ersetzt man $\ddot u$ durch die Geodätengleichung, so kommt nach kurzer Rechnung Null heraus. □

In der *gewöhnlichen Analysis* sucht man Maxima von differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Die Maxima sind unter den sogenannten kritisichen Stellen zu suchen. Das sind definitionsgemäß Punkte ins denen alle n partiellen Ableitungen verschwinden.

In der *Variationsrechnung* geht man weiter. Anstelle von D betrachtet man Mengen $\mathcal{D}$ von Funktionen und anstelle f Abbildungen $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Auch hier kann man versuchen, den Begriff der kritischen Stelle zu prägen. Die Variationsrechnung defniert diese als die Nullstellen der *Variation δF*. Wir wollen keine systematische Variationsrechnung entwickeln, sondern diese nur an einem typischen Beispiel erläutern:

Sei (D, g) ein Riemannsches Gebiet, $u : [a, b] \to D$ eine glatte Kurve. Wir wollen u „variieren“, ohne den Anfangs- und Endpunkt zu verändern. Wir betrachten daher eine Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $h(a) = h(b) = 0$ und bilden die variierte Funktion

$$u(t, s) := u(t) + sh(t), \quad |s| < \varepsilon.$$

Dabei sei die Zahl $\epsilon > 0$ so klein gewählt, daß $u(t, s)$ für alle $t \in [a, b]$ und $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ in D enthalten ist. Dies geht nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit. Wir wollen $u(t, s)$ als eine durch s parametrisierte Schar von Kurven

$$[a, b] \longrightarrow D, \quad t \longmapsto h(t, s),$$

ansehen. Alle diese Kurven verbinden a mit b. Uns interessieren diese Kurven für kleine s. Wir wollen also u nur wenig variieren. Genauer interessieren wir uns für folgende Bedingung:

4.5 Definition. *Eine glatte Kurve $u : [a, b] \to (D, g)$ in einem Riemannschen Gebiet im $\mathbb{R}^n$ genügt dem **Variationsprinzip**, falls für jede glatte Funktion $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(a) = h(b) = 0$ die Bogenlänge $l_g(s)$ der Kurve u_s* DkS

$$t \longmapsto u_s(t) := u(t, s) = u(t) + sh(t) \qquad (|s| < \varepsilon)$$

eine kritische Stelle bei $s = 0$ hat,

$$\left.\frac{dl_g(s)}{ds}\right|_{s=0} = 0.$$

Wenn u eine kürzeste Verbindungslinie ist, wenn also $l_g(u) \le l_g(v)$ für alle glatten Kurven in (D, g) ist, welche $u(a)$ mit $u(b)$ verbinden, dann genügt u offensichtlich dem Variationsprinzip. Die Umkehrung hiervon ist jedoch falsch. Wir kommen hierauf noch zurück. Eigentlich interessieren uns die kürzesten Verbindungen, das Variationsproblem ist jedoch leichter zugänglich.

4.6 Satz. *Sei $u : [a, b] \to (D, g)$ eine natürlich parametrisierte Kurve in einem Riemannschen Gebiet. Folgende beiden Aussagen sind gleichbedeutend:* GV

1. *u ist geodätisch.*
2. *u genügt dem Variationsprinzip.*

Vor dem Beweis formulieren wir einen einfachen

4.7 Hilfssatz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß* PTv

$$\int_a^b f(t)P(t)\, dt = 0$$

für jedes Polynom P. Dann gilt $f = 0$.

Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Approximationssatzes von Weierstraß. Nach ihm existiert eine gegen f gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen P_n. Aus der Voraussetzung folgt, daß das Integral über f^2 verschwindet. Da diese Funktion stetig und nirgends negativ ist, folgt $f = 0$.

□

Es genügt, in 4.7 nur solche Polynome zu nehmen, welche Vielfaches eines Pollynoms $Q \neq 0$ sind. Denn dann folgt zunächst $fQ =$ und hieraus $f = 0$. (Da f stetig ist, spielen die endlich vielen Nullstellen von Q keine Rolle.) Insbesondere kann man sich in 4.7 auf Polynome P mit $P(a) = P(b)$ beschränken.

□

Eine Variante des Hilffsatzes besagt:

4.8 Hilfssatz. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, so daß* QTv

$$\int_a^b \big(f(t)P(t) + g(t)P'(t)\big)\, dt = 0$$

für alle Polynome P mit $P(a) = P(b) = 0$. Dann gilt

$$f = g'.$$

Zum Beweis benutzt man partielle Integration ($gP' \mapsto g'P$). □

Beweis von 4.6 : Wir wenden uns der Richtung $2 \Rightarrow 1$) zu. Dabei wird auch die Umkehrung klar sein. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{d}{ds}\int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(u(t) + sh(t))\,(\dot u_i(t) + s\dot h_i(t))\,(\dot u_j(t) + s\dot h_j(t))}\, dt\,\Big|_{s=0} = 0.$$

Nach der Leibnizschen Regel, darf man die Ableitung unters Integralzeichen ziehen. Leitet man die Wurzel nach der Regel

$$\frac{d\sqrt{f}}{ds} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

ab, so sieht man, daß der Nenner (nach Einsetzen von $s = 0$ konstant wird, da die Kurve u nach Voraussetzung natürlich parametrisiert ist. Es folgt

$$\int_a^b \Big(\sum_{ij\nu} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} h_\nu \dot u_i \dot u_j + 2\sum_{i\nu} g_{i\nu}\dot u_i \dot h_\nu\Big)\, dt = 0.$$

Man kann alle h_ν bis auf eins auf 0 setzen und dann 4.8 anwenden:

$$\sum_{ij\nu} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu}\dot u_i \dot u_j = 2\sum_{i\nu} \frac{d(g_{i\nu}\dot u_i)}{dt}.$$

Mittels der Auswertung

$$\frac{d(g_{i\nu}\dot u_i)}{dt} = \frac{d(g_{i\nu}(u(t))\,\dot u_i(t))}{dt} = g_{i\nu}(u(t))\,\ddot u_i(t) + \sum_\mu \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu}(u(t))\,\dot u_\mu(t)\dot u_i(t)$$

gelangt man nun rasch zur Geodätengleichung. □

5. Existenz von Geodätischen

Wir haben Geodätische als Lösungen einer Differentialgleichung eingeführt, aber außer im flachen Fall wissen wir nicht, ob Geodätische existieren. Das muß aber zumindest geklärt sein, bevor man die Frage nach der Existenz von kürzesten Verbindungen stellen kann.

5.1 Satz. *Sei $a \in (D,g)$ ein Punkt eines Riemannsches Gebiets im $\mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}$ ein Vektor. Es existiert ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine Geodätische* ExG

$$u : I \longrightarrow D, \quad u(0) = a,\ \dot u(0) = A.$$

Sind $u : I \to D$, $v : J \to D$ zwei solche Geodätische, so gilt $u(t) = v(t)$ im Durchsschnitt der beiden Intervalle.

Folgerung. *Unter allen Intervallen I gibt es ein größtes.*

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wollen diesen nicht beweisen.

Der Existenzsatz ist noch etwas feiner. Man kann noch die Stetigkeit der Lösungen in Abhängigkeit von weiteren Parametern beweisen. Im Falle der Geodätischen besagt diese Erweiterung:

5.2 Zusatz zu 5.1. *Seien $K \subset D$ ind $L \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mengen. Man kann ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ finden, so daß die Geodätischen zu den Anfangswerten $a \in K$ ind $A \in L$ alle auf I definiert sind. Bezeichnet man sie mit $u_{a,A}(t)$, so gilt: Die Abbildung* ZpA

$$I \times K \times L \longrightarrow D, \quad (t,a,A) \longmapsto u_{a,A}(t),$$

ist stetig und im Innern sogar differenzierbar.

Kapitel II. Krümmung

1. Relative Krümmung einer Kurve

Es gibt zwei unterschiedliche Krümmungsphänome. Eine in den Raum eingebettete Kurve kann relativ zu dem umgebenden Raum gekrümmt sein. Dies ist jedoch lediglich ein relatives Phänomen, da man eine Kurve längenerhaltend gerade biegen kann. Mathematisch kann man dies so ausdrücken.

1.1 Bemerkung. *Jedes eindimensionale Riemannsche Gebiet (D, g), $D \subset \mathbb{R}$ ist flach.* jEg

Das gleiche gilt für eine Zylinderfläche wie $\{(x, y, z);\ x^2 + y^2 = 1\}$. Auch diese kann man wenigstens lokal eben biegen ohne metrische Verhältnisse zu zerstören. Anders ist die Situation bei einer Kugelfläche. Diese kann man nicht eben biegen, ohne metrische Eigenschaften zu zerstören.

Es ist unsere Ziel, Größen zu definieren, welche die innere Krümmung beschreiben. Zuvor müssen wir jedoch die relative Krümmung beschreiben. Es wir sich zeigen, daß zwischen beiden ein Zusammenhang besteht.

(Relative) Krümmung einer Kurve

Wir erinnern, daß $\dot{u}(t)$ den Tangentialvektor einer glatten Kurve zum Parameterwert t beschreibt. Genauer ist der Pfeil von $u(t)$ nach $u(t) + \dot{u}(t)$ das, was man als den geometrichen Tangentialvektor bezeichnen sollte. Die Euklidische Länge von $\dot{u}(t)$ ist die Geschwindigkeit. Wie beschränken uns auf natürlich parametrisierte Kurven $u : I \to \mathbb{R}^n$ (in bezug auf die Euklidische Metrik E des $\mathbb{R}^n$). Es gelte also

$$\sum_{i=1}^{n} |\dot{u}_i(t)|^2 = \text{konstant}.$$

Dann ist die Geschwindigkeit von u konstant. Änderungen von $\dot{u}(t)$ können also nur dadurch zustande kommen, daß sich die Richtung der Kurve ändert, also, daß sie sich krümmt. Dadurch wird nahegelegt, die zweite Ableitung $\ddot{u}(t)$ mit der Krümmung in Verbindung zu bringen. Da uns zunächst nur interessiert, wei stark sich die Kurve absolut krümmt (unabhängig von Richtungsfragen), werden wir dazu geführt, die Euklidische Norm $||\ddot{u}||$ als Maß für die Krümmung zu nehmen. Allerdings sollte man diese relativ zum Betrag der Geschwindigkeit nehmen. Dies garantiert, daß die Krümmung sich nicht ändert, wenn man die Kurve $u(t)$ durch $u(Ct)$ (C eine von 0 verschiedene Konstante) ersetzt.

1.2 Definition. *Sei $u : I \to \mathbb{R}^n$ eine natürlich parametrisierte nicht konstante Kurve. Dann ist* DrK

$$K_u(t) := \frac{\|\ddot{u}(t)\|}{\|\dot{u}(t)\|^2}$$

die (relative) Krümmung der Kurve u zum Parameterwert t.

Am Beispiel

$$u(t) = r(\cos t, \sin t), \quad K_u(t) = \frac{1}{r} \qquad (r > 0)$$

sieht man, daß die Krümmung der Kreislinie vom Radius r gerade $1/r$ ist. Kleine Kreise sind stärker gekrümmt als große.

1.3 Bemerkung. *Sei $u(t)$ eine natürlich parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt* NpP

$$\dot{u}(t) \perp \ddot{u}(t).$$

Beweis. Man differenziere die Gleichung

$$\sum_i \dot{u}_i(t)^2 = \text{konstant.} \qquad \square$$

Wenn die Krümmung von u zum Parameterwert von 0 verschieden ist, so spannen insbesondere $\dot{u}(t)$ und $\ddot{u}(t)$ einen zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ auf. Man nennt diesen zweidimensionalen Raum

$$\mathbb{R}\dot{u}(t) + \mathbb{R}\ddot{u}(t) \subset \mathbb{R}^n$$

dann die **Schmiegungsebene** von u zum Parameterwert t. Um die Schmiegungsebene im geometrischen Sinne zu erhalten muß man diesen Untervektorraum in den Punkt $u(t)$ verschieben. Die geometrische Schmiegungsebene ist also eigentlich der affine Raum.

$$u(t) + (\mathbb{R}\dot{u}(t) + \mathbb{R}\ddot{u}(t)).$$

(Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt affiner Raum, falls er von der Form $a + W$ mit einem Untervektorraum w gilt. Dabei ist W eindeutig bestimmt. Für a kann man jedes Element von A nehmen. Mathematisch arbeit man lieber mit Vektoräumen als mit affinen Räumen. Daher ziehen wir es vor, $\dot{u}(t)\mathbb{R} + \ddot{u}(t)\mathbb{R}$ die Schmiegungsebene zu nennen.)

2. Relative Krümmung von Flächenstücken

Wir wollen nun die relative Krümmung von parametrisierbaren Flächenstücken $X \subset \mathbb{R}^n$ definieren. Es existiert also eine reguläre und topologische Abbildung

$$\alpha : D \longrightarrow X, \quad D \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.}$$

Sei $x \in X$ ein fester Punkt, $a \in D$ der entsprechende Parameterpunkt. Die Funktionalmatrix definiert eine lineare Abbildung

$$J(\alpha, a) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dies ist injektiv, da die Funktionalmatrix nicht ausgeartet ist. Man nennt den d-dimensionalen Untervektorraum

$$T_x X := J(u, a)\mathbb{R}^d$$

den Tangentialraum von X in x. (Der geometrische Tangentialraum ist eigentlich der affine Raum $x + T_x X$).

Der Name „Tangentialraum“ kann folgendermaßen gerechtfertigt werden:

1) Er hängt nicht ab von der Wahl der Parametrisierung.
2) Ist $u : I \to X$ eine glatte Kurve, so ist $\dot{u}(t)$ in $T_{u(t)}X$ enthalten.

Beide Eigenschaften folgen leicht aus der Kettenregel. Man kann sich sogar überlegen, daß $T_x X$ aus der Menge alle $\dot{u}(0)$ besteht, wobei u alle Kurven $u : (-r, r) \to X$ mit $u(0) = x$ durchläuft.

Wir erinnern daran, daß die Parametrisierung $u : D \to X$ eines Flächenstücks eine Riemannsche Metrik $g(x) = J(u, x)' J(u, x)$ definiert und daß man diese dazu benutzen kann, Geodätische auf X einzuführen. Der Existenzatz für Geodätische impliziert:

Zu jedem Punkt $a \in X$ und zu jedem Tangentialvektor $A \in T_a X$ existiert eine Geodätische $u : I \to X$ mit den Eigenschaften

$$0 \in I, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = A.$$

Diese ist in naheliegendem Sinne eindeutig bestimmt und es gibt ein eindeutig bestimmtes größtes I. Ist $K \subset T_a X$ eine beschränkte Teilmenge, so kann man eine gemeinsames I für alle $A \in K$ finden. Die Abbildung (in naheliegender Bezeichnung)

$$K \times I \longrightarrow X, \quad (A, t) \longmapsto u_A(t)$$

ist stetig.

Wir wollen nun insbesondere Geodätische u auf X und deren relative Krümmung betrachten. Wir wissen bereits, daß $\ddot{u}(t)$ auf $\dot{u}(t)$ senkrecht steht. Wir wollen mehr zeigen, nämlich daß $\ddot{u}(t)$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_{u(t)}X$ senkrecht steht und daß diese Eigenschaft die Geodäsie sogar charakterisiert.

2.1 Hilfssatz. *Eine glatte Kurve u auf einem Flächenstück $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann geodätisch, wenn $\ddot{u}(t)$ für jeden Parameterwert t senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{u(t)}X$ steht.* gsT

Beweis. Sei $u : D \to X$ eine reguläre Parametrisierung des Flächnstücks. Wir transportieren die Kurve u ins Paramtergebiet, $v : I \to D$, $u = u \circ v$. Der Tangentialraum in einem zu $a \in D$ gehörenden Punkt wird von den Spalten der Jacobimatrix aufgespannt. Es gilt also

$$\ddot{u}(t) \perp T_{u(t)} \iff \sum_{i=1}^{n} \ddot{u}(t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(u(t)) = 0 \quad (\forall j).$$

Man wende jetzt zweimal die Kettenregel an, um $\ddot{u}$ mittels $u = u \circ v$ durch Ableitungen von u un v ermitteln. Eine einfache Rechnung zeigt, daß genau die Gedodätengleichung für v zur Riemannschen Metrik $g(x) = J(u,x)'J(u,x)$ herauskommt. $\square$

2.2 Definition. *Sei X ein Flächenstück im $\mathbb{R}^n$, $a \in X$ ein Punkt und $A \in T_aX$ ein von 0 verschiedener Tangentialvektor. Die Krümmung von X in a in Richtung A ist die Krümmung einer Geodätischen $u : (-\varepsilon, \epsilon) \to X$ mit $u(0) = a$ zum Parameterwert $t = 0$,* DKf

$$k_X(a, A) := K_u(0).$$

3. Die Gaußsche Krümmung einer Hyperfläche

In diesem Abschnitt sei $u : D \to X$ die Parametrisierung eines Hyperflächenstücks im $\mathbb{R}^n$, d.h. $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (offen). In diesem Fall hat der Tangentialraum die Dimension $n - 1$.

Ein Vektor $\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Einheitsnormalenvektor*, falls er senkrecht auf T_aX steht (bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts) und falls seine Euklidische Länge 1 ist. Es gibt genau zwei Einheitsnormalenvektoren. Ist $\mathfrak{n}$ der eine, so ist $-\mathfrak{n}$ der andere.

3.1 Definition. *Eine Orientierung eines Hyperflächenstücks X in einem Punkt $a \in X$ ist eine Auswahl eines der beiden Einheitsnormalenvektors.* DoH

Ist $u : (-\varepsilon, \epsilon) \to X$ eine Geodätische,so steht $\ddot{u}(0)$, wie wir wissen, auf dem Tangentialraum senkrecht. Es gilt daher

$$\ddot{u}(0) = s\mathfrak{n}.$$

Wir versehen nun die Krümmung mit einem Vorzeichen, dem Signum von s,

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s = 0, \\ -1 & \text{falls } s < 0. \end{cases}$$

Es gilt offenbar

$$\operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}\left(\langle \ddot{u}(0), \mathfrak{n}\rangle\right).$$

3.2 Definition. *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Hyperflächenstück, welches in dem Punkt* DgKa
$a \in X$ orientiert ist und $A \in T_aX$ ein Tangentialvektor, so ist ist die gerichtete Krümmung von X in a in Richtung A durch

$$K_X(a, A) = \operatorname{sgn}\left(\langle \ddot{u}(0), \mathfrak{n}\rangle\right) k_X(a, A)$$

definiert.

Den Normalenvektor stelle man sich als Beobachter vor. Das Vorzeichen der Krümmung gibt an, ob sich das Flächenstück in Richtung A vom Beobachter wegkrümmt oder sich auf ihn zukrümmt. Ist X beispielsweise ein Stück Kugelfläche und weist der Normalenvektor nach außen, so krümmt sich X vom Beobachter weg, die (gerichtete) Krümmung ist also negativ. Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man für X ein Stück Gebirgslandschaft nimmt. Ein Wanderer (Normalenvektor nach außen, also in die Luft gerichtet), mag bei einer Bergbesteigung die Krümmung folgendermaßen erleben. In Horizontalrichtung krümmt sich der Berg von ihm weg, in Horizontalrichtung ist also die Krümmung immer negativ. Zu Beginn der Besteigung, wenn die Steilheit noch im Zunehmen ist, krümmt sich der Berg in Vertikalrichtung auf ihn zu, die Krümmung in Vertikalrichtung ist dann also positiv. Gegen Ende des Aufstiegs, wenn die Steilheit allmählich geringer wird, krümmt sich der Berg von dem Wanderer in Vertikalrichtung weg. Ein Maulwurf, der unterirdisch die Wanderung begleitet, sieht dasselbe Krümmungsverhalten (soweit ein Maulwurf sehen kann) mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wir kommen nun zur Gaußschen Krümmung eines Hyperflächenstücks. Zunächst eine kleine banale Bemerkung: Es gilt

$$K_X(a, tA) = K_X(a, A) \quad \text{für} \quad t \neq 0 \ (t \in \mathbb{R}).$$

Wenn man sich in einem festen Punkt $a \in X$ für alle möglichen Krümmungen $K_X(a, A)$ interessiert (bei variablem A), so kann man sich auf Vektoren der Norm 1 beschränken, $\|A\| = 1$. Die Menge dieser Vektoren ist kompakt. Wir wissen außerdem, daß die Zordnung

$$A \longmapsto K_X(a, A) \quad (A \neq 0)$$

stetig ist. Da eine stetige Funktion auf einem Kompaktum sowohl Minimum als auch Maximum besitzt, besitzt $K_X(a, A)$ ein Maximum und ein Minimum. (Es gilt sogar, daß die Menge all dieser Krümmungen ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ darstellt.) Sei m das Minimum un M das Maximum. Ersetzt man den Normalenvektor durch sein Negatives, so wird $-m$ das Maximum und $-M$ das Minimum. Das Produkt der beiden bleibt dasselbe! Dies führt zu:

3.3 Definition. *Sei $X \in \mathbb{R}^n$ ein Hyperflächenstück. Die **Gaußsche Krümmung** in einem Punkt $a \in X$ ist das Produkt der beiden extremalen Krümmungen,* DgK

$$\kappa_X(a) := \max_A K_X(a,A) \cdot \min_A K_X(a,A) \qquad (A \neq 0).$$

(Dieses Produkt ist von der Wahl des Einheitsnormalenvektors unabhängig.)

Die Gaußsche Krümmung kann positiv und negativ sein. Der Bergsteiger in obigem Beispiel schreitet auf einer Fläche negativer Gaußscher Krümmung, solange er sich im Anstieg bei zunehmender Steilheit befindet. Erst weiter oben, wenn der Berg allmählich flacher wird, ist die Gaußsche Krümmung der Bergoberfläche positiv. Der Maulwurf unter ihm erlebt das genauso.

4. Theorema Egregium, Formulierung

Die Definition der Gaußschen Krümmung ist eine Größe, welche mit dem Krümmungsverhalten einer Fläche $X \subset \mathbb{R}^n$ relativ zu dem umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ zu tun hat. Gauß hat vermutet, daß diese Krümmung im Wahrheit nichts mit dem umgebenden Raum zu tun hat, sondern eine innere Eigenschaft von X ausdrückt. Was soll das heißen. Zunächst einmal gibt es einen natürlichen Isometriebegriff für Flächenstücke:

4.1 Definition. *Eine Isometrie zwischen zwei Flächenstücken $\varphi : X \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} \in \mathbb{R}^m$ ist eine bijektive Abbildung mit folgender Eigenschaft: Sind $u : D \to X$ und $\tilde{u} : \tilde{D} \to Y$ reguläre Parametrisierungen, so ist* DfI

$$\tilde{u}^{-1} \circ \varphi \circ u : D \longrightarrow \tilde{D}$$

eine Isometrie im Sinne von I.2.4.

Diese Definition hängt natürlich nicht von der Wahl der Parametrisierungen ab. Isometrien sind offenbar topologische Abbildungen $\varphi : X \to Y$, welche die Bogenlängen von Kurven erhalten.

4.2 Theorema Egregium von Gauss. *Die Gaußsche Krümmung von Flächenstücken im Raum $\mathbb{R}^3$ ist isometrisch invariant. Ist also $\varphi : X \to Y$ eine Iosmetrie zwischen (zweidimensionalen) Flächenstücken im Raum, so gilt* TEG

$$\kappa_X(a) = \kappa_Y(\varphi(a)) \qquad (a \in X).$$

Vor dem Beweis benötigen wir eine Information über die Auswahl des Einheitsnormalenvektors. Dazu machen wir eine Vorbemerkung aus der linearen Algebra: Seien $a_1, \dots, a_{n-1}$ Spaltenvektoren aus dem $\mathbb{R}^n$. Wir fassen sie zu einer $n \times (n-1)$-Matrix $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ zusammen. Wir streichen aus dieser Matrix die i-te Zeile ($1 \leq i \leq n$) und erhalten eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_i. Wir definieren

$$d_i := (-1)^{i+1} \det(A_i).$$

Der Spaltenvektor d, welcher aus den $d_1, \dots, d_n$ gebildet wird, heißt das Kreuzprodukt der Vektoren $a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$d := a_1 \times \cdots \times a_{n-1}.$$

Aus den Rechenregeln für die Determinante folgt:

1) Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf den Vektoren $a_1, \dots, a_{n-1}$.
2) Das Kreuzprodukt ist dann und nur dann Null, wenn die $n-1$ Vektoren $a_1, \dots a_{n-1}$ linear abhängig sind.

Für uns reicht der Fall $n = 3$, wo man dies leicht nachrechnen kann. Sei nun $\alpha : D \to X$ eine reguläre Parametrisierung eines Hyperflächenstücks. Wir betrachten die Jacobimatrix in einem Punkt $a \in D$. Sie besitzt $n-1$ Spalten,

$$J(\alpha, a) = (J_1(\alpha, a), \dots, J_{n-1}(\alpha, a)).$$

Diese bilden eine Basis des Tangentialraums $T_{\alpha(a)}(X)$. Ihr Kreuzprodukt ist daher ein Normalenvektor und

$$\mathfrak{n}_\alpha(a) = \mathfrak{n}(a) = \frac{J_1(\alpha, a) \times \cdots \times J_{n-1}(\alpha, a)}{\|J_1(\alpha, a) \times \cdots \times J_{n-1}(\alpha, a)\|}$$

ist ein Einheitsnormalenvektor im Punkt $\alpha(a)$. Dieser hängt natürlich von der Wahl der Parametrisierung ab.

4.3 Bemerkung. *Sei $\alpha : D \to X \subset \mathbb{R}^n$ ein regulär parametrisiertes Hyperflächenstück. Es existiert eine differenzierbare Auswahl* AeD

$$D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \mathfrak{n}_\alpha(x) \perp T_{\alpha(x)}X,$$

des Einheitsnormalenvektors (zum Punkt $\alpha(x)$).

Wir führen nun die die Fundamentalformen eines parametrisierten Hyperflächenstücks ein:

4.4 Definition. *Sei $u : D \to X \subset \mathbb{R}^n$ ein regulär parametrisiertes Hyperflächenstück. Die* ***erste Fundamentalform*** *ist* FuF

$$g(x) = J(u,x)'J(u,x).$$

Die ***zweite Fundamentalform*** *ist*

$$h(x) = (h_{ij}(x))_{1\le i,j\le n} \quad \textit{mit} \quad h_{ij}(x) = \Big\langle \mathfrak{n}_u(x), \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big\rangle.$$

Die erste Fundamentalform haben wir bereits kennen gelernt, beispielsweise um die Geodätengleichung aufzustellen. Die zweite Fundamentalform wird Ähnliches für die Krümmung leisten.

4.5 Hilfssatz. *Sei $\alpha : D \to X$ eine reguläre Parametrisierung eines d-dimensionalen Flächenstücks, ax $\in D$ ein Parameterpunkt, $\tilde{x} = \alpha(x)$ der entsprechende Punkt auf X und schließlich $A \in \mathbb{R}^d$ ein von Null verschiedener Vektor, der dem Tangentialvektor* bmZ

$$\tilde{A} = J(\alpha,x)(A) \in T_{\alpha(x)}X$$

entspreche. Dann gilt

$$K_X(\tilde{x},\tilde{A}) = \frac{h(x)[A]}{g(x)[A]}.$$

Wir erinnern an die Bezeichnung

$$S[v] = \sum_{1\le i,j\le d} s_{ij}v_iv_j$$

für eine symmetrische $d \times d$-Matrix S und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Schreibt man v als Spaltenvektor, so gilt

$$S[v] = v'Sv.$$

Beweis von 4.5 . Sei $u : (-\varepsilon,\varepsilon) \to X$ eine Geodätische mit $u(0) = \tilde{x}$ und $\dot{u}(0) = \tilde{A}$. Nach Definition gilt

$$\ddot{u}(0) = K_X(\tilde{x},\tilde{A})\,\|\dot{u}(0)\|^2\,\mathfrak{n}_u(x).$$

Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{n}_u(x)$, so erhält man

$$\langle \ddot{u}(0), \mathfrak{n}_u(x)\rangle = K_X(\tilde{a},\tilde{A})\,\|\dot{u}(0)\|^2.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus den Formeln

$$g(x)[v] = \|\dot{u}(0)\|^2 \quad \text{und} \quad h(x)[v] = \langle \mathfrak{n}_\varphi(x), \ddot{u}(0)\rangle.$$

Um die beiden Formeln zu beweisen, schreibt man $u = u \circ v$ mit einer Kurve $v : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow D$. Man leitet nun mittels der Kettenregel u zweimal ab und wertet dann bei $t = 0$ aus. Man benutze $v(0) = x$ und $\dot{v}(0) = v$ sowie die Tatsache, daß $\mathfrak{n}(x)$ senkrecht auf $T_{\tilde{x}}X$ und damit auf $J(u,x)(\ddot{v}(0))$ steht. Die beiden Formeln und damit der Beweis von 4.5 folgen unmittelbar. □

4.6 Hilfssatz. *Seien g eine symmetrische positiv definite und h irgendeine symetrische 2×2-Matrix. Dann gilt* mmD

$$\max_A \frac{h[A]}{g[A]} \cdot \min_A \frac{h[A]}{g[A]} = \frac{\det g}{\det h} \qquad (A \neq 0).$$

Folgerung. *Die Gaußsche Krümmung eines regulär parametrisierten Flächenstücks $u : D \to X \subset \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $a = u(x)$ berechnet sich aus den beiden Fundamentalformen zu*

$$\kappa_X(a) = \frac{\det g(x)}{\det h(x)}.$$

Beweis. Die Aussage ändert sich nicht, wenn man simultan die Ersetzung $g \mapsto u'gu$ und $h \mapsto u'hu$ mit einer invertierbaren 2×2-Matrix vornimmt. Jede symmetrische reelle Matrix besitzt nach dem Spektralsatz eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren oder anders ausgedrückt, es gibt eine orthogonale Matrix u ($u'u$ =Einheitsmatrix), so daß $u'gu = d$ eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalelemente sind positiv, da g positiv definit ist. Dam man aus den diagonaleinträgen von d die Quadratwurzel ziehen kann, findet man eine Matrix —wir bezeichnen sie wieder mit u—, so daß $u'gu$ die Einheitsmatrix ist. (Daß u nicht mehr orthogonal zu sein braucht, macht nichts.) Wir können als von vornherein annehmen, daß g die Einheitsmatrix e ist. Ersetzt man nun h durch $v'hv$ mit einer orthogonalen Matrix und beachtet man $v'ev = e$, so kann man erreichen, daß auch h eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ist. Es ist eine einfache Übungsaufgabe zu zeigen, daß das Minimum bzw. Maximum der Funktion

$$\frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

gerade λ_1 bzw. λ_2 ist. Ihr Produkt ist gleich

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det g}{\det h}.$$ □

5. Theorema Egregium, Beweis

Sei $X \to Y$ eine Isometrie von Hyperflächenstücken im $\mathbb{R}^{n+1}$. Wählt man für jedes der beiden Flächenstücke eine reguläre Parametrisierung, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \\ D \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] & \tilde{D} \arrow[u, "\tilde{\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen die Fundamentalformen mit (g,h) bzw. $(\tilde g,\tilde h)$. das Theorema Egregium besagt

$$\frac{\det g(x)}{\det h(x)} = \frac{\det \tilde g(y)}{\det \tilde h(y)} \qquad (y=\varphi(x)).$$

Wir kennen das Transformationsverhalten von g, nämlich

$$\tilde g(y) = J(\varphi,x)' g(x) J(\varphi,x).$$

Das Theorema Egregium besagt also, daß sich $\det h$ genau so transformiert wie $\det g$, also

$$\det \tilde h(y) = \det J(\varphi,x)^2 \det h(x).$$

Es ist somit unser Ziel, diese Formel zu beweisen. Da sich h in recht komplizierter Weise aus α berechnet, ist diese Formel alles andere als trivial. Der Gedankengang ist der. Da man das Transformationsverhalten von g gut kennt, müßte man eigentlich durch sein, wenn es gelingt, $\det h$ durch g auszudrücken. Dies ist in der Tat der Fall, wie die folgenden (recht komplizierten) Rechnungen zeigen.

5.1 Hilfssatz. *Es gilt* ZnA

$$\Big\langle \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_j}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}\Big\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right] \qquad (=H_{ij}^k).$$

Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen. □

5.2 Hilfssatz. *Es gilt* ZnB

$$\frac{\partial^2\alpha(x)}{\partial x_i\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x)\,\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_k} + h_{ij}(x)\mathfrak{n}_\alpha(x).$$

Beweis. Die Vektoren

$$\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_n},\ \mathfrak{n}_\alpha(x)$$

sind linear unabhängig. (Der letzte steht senkrecht auf den ersten n.) Es gilt daher eine Darstellung

$$(*) \qquad \frac{\partial^2\alpha(x)}{\partial x_i\partial x_j} = \sum_{k=1}^n {\Gamma'}_{ij}^k(x)\,\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_k} + {h'}_{ij}(x)\,\mathfrak{n}_\alpha(x)$$

mit zunächst irgendwelchen Γ', h'. Nach Definition der zweiten Fundamentalform ist

$$h_{ij} = \Big\langle \mathfrak{n}_\alpha(x), \frac{\partial\alpha^2(x)}{\partial x_i\partial x_j}\Big\rangle.$$

Multipliziert man $(*)$ skalar mit $\mathfrak{n}_\alpha(x)$, so folgt $h_{ij} = (h')_{ij}$. Multipliziert man $(*)$ skalar mit $\partial\alpha/\partial x_k$, so folgt mitttels 5.1 ${\Gamma'}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$. □

Wir leiten jetzt die Formel 5.2 nach x_k ab und multiplizieren das Resultat skalar mit den partiellen Ableitungen von α.

5.3 Hilfssatz. *Es gilt* ZnC

$$\Big\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle = \sum_{1\le\mu,\nu\le n} \Gamma^k_{ij}\Gamma^\mu_{i\nu}\, g_{\mu l} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial\Gamma^\nu_{ik}}{\partial x_j}\, g_{\nu l} - h_{ik}h_{jl}.$$

Beweis. Aus 5.2 folgt zunächst

$$\Big\langle \frac{\partial^3\alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle = \sum_{\nu=1}^n \Gamma^\nu_{ik} \Big\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}, \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_j \partial x_\nu}\Big\rangle +$$
$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial\Gamma^\nu_{ik}}{\partial x_j}\Big\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j}\Big\langle \mathfrak{n}_\alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle + h_{ik}\Big\langle \frac{\partial\mathfrak{n}_\alpha}{\partial x_j}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle.$$

Um diese Formel zu vereinfachen, nutzen wir

$$\Big\langle \mathfrak{n}_\alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle = 0$$

aus und die Folgerelation (Ableiten nach x_j)

$$\Big\langle \frac{\partial\mathfrak{n}_\alpha}{\partial x_j}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle + h_{jl} = 0$$

Schließlich und endlich benutze man

$$\Big\langle \frac{\partial\alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_l}\Big\rangle = g_{\nu l}.$$

und 5.3 ist bewiesen. □

Die Formel 5.3 hat eine merkwürdige Eigenschaft. Die linke Seite ändert sich nicht wenn man j mit k vertauscht. Auf der rechten Seite ist dies nicht offensichtlich. Vergleicht man die beiden rechten Seiten (einmal j mit k vertauscht, so erhält man eine Relation, in der der nur die Funktionen h und Funktionen, die sich aus g berechnen lassen eingehen. Wir definieren zunächst die g-Terme, die in diese Relation eingehen:

5.4 Definition. *Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Die „Krümmungsgrößen" sind* DKt

$$R^m_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^m_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial\Gamma^m_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^n \big(\Gamma^s_{ij}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{sj}\big),$$

sowie

$$R_{iljk} = \sum_{m=1}^n g_{lm} R^m_{ijl}.$$

Aus 5.3 folgt nun auf dem angegebenen Wege:

5.5 Satz. *Sei $\alpha : D \to X$ eine reguläre Parametrisierung eines Hyperflächenstücks. Es gilt:* GkK

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}.$$

Folgerung. *Die Gaußsche Krümmung eines regulär parametrisierten Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ ist*

$$\kappa_X(\alpha(x)) = \frac{R_{1212}(x)}{\det g(x)}.$$

Unser Ziel, die Gaußsche Krümmung ganz durch g und abgeleitete Größen auszudrücken, ist somit erreicht. Nun sollte es möglich sein, das Theorema Egregium zu beweisen. Wir erinnern an das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \\ D \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\varphi"] & \tilde{D} \arrow[u, "\tilde{\alpha}"'] \end{tikzcd} .$$

Das Theorema Egregium bedeutet nicht anderes als

$$R_{1212}(x) = \det J(\varphi, x)^2 \tilde{R}_{1212}(y) \qquad (y = \varphi(x)).$$

Wir formulieren gleich die allgemeinsten Transformationsformeln (in beliebigen Dimensionen).

5.6 Satz. *Sei $\varphi : (D, g) \to (\tilde{D}, \hat{G})$ eine Isometrie pseudoriemannscher Gebiete. Es gilt* TrK

$$R_{ijkl}(x) = \sum_{\mu,\nu\kappa,\lambda} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_\kappa}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_l}\tilde{R}_{\mu\nu\kappa\lambda}(y).$$

Die behauptete Transformationsformel folgt hieraus in Verbindung mit

5.7 Bemerkung. *Es gilt* Srt

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijkl} = R_{klij}$$

sowie

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \qquad \textit{(Bianchi-Identität).}$$

Insbsondere ist im Falle der Dimension zwei R_{1212} die einzig relevante Krümmungsgröße.

Kapitel III. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1. Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit

1.1 Definition. *Eine **Karte** auf einer Menge X ist eine bijektive Abbildung einer Teilmenge $U_\varphi \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ (n geeignet),* Dka

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad U_\varphi \subset X, \quad V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ (offen)}.$$

*Ein **Atlas** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Menge von Karten, deren Definitionsbereiche ganz X überdecken,*

$$X = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi.$$

Sind φ, ψ zwei Karten auf X, so definiert man die Kartenwechselabbildung durch

$$\gamma : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi), \quad \gamma(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Abweichend von der strengen Konvention der Mengenlehre schreibt man häufig

$$\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}.$$

Solcher Mißbrauch der Schreibweise bedingt, daß man im Hintergrund sich über die genauen Definitions- und Zielbereiche klar ist. Interessant ist die Kartenwechselabbildung nur, wenn der Durchschnitt $U_\varphi \cap U_\psi$ nicht leer ist. Man braucht dies jedoch nicht extra zu fordern, wir halten uns an die Konvention, daß es von der leeren Menge in eine beliebige Menge genau eine Abbildung (die leere Abbildung) gibt.

1.2 Definition. *Man nennt zwei Karten* Dkw

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi \subset \mathbb{R}^n, \quad \psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi \subset \mathbb{R}^m$$

*auf einer Menge **differenzierbar verträglich**, falls gilt:*

1. *$\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^m$ sind offen.*
2. *Die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus.*

Wenn $U_\varphi \cap U_\psi$ nicht leer ist, so muß natürlich $n = m$ gelten.

1.3 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt differenzierbar, falls alle Kartenwechselabbildungen in $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind.* Dad

Zwei Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen differenzierbar verträglich, falls ihre Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ differenzierbar ist.

Man muß sich überlegen, daß dies eine Äquivalenrelation ist. Nicht offensichtlich ist lediglich die Transitivität,

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{C}.$$

Man muß dazu zeigen, daß die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{C}$ diffeomorph ist. Dazu nutzt man aus, daß für alle $\chi \in \mathcal{B}$ die Abbildungen $\chi \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ \chi^{-1}$ diffeomorph sind. Die Gleichung „$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \psi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \varphi^{-1}$“ ist mit Vorsicht zu genießen, sie gilt nur auf einem Teil von $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$. Dies reicht aber aus, da die Definitionsbereiche aller χ ganz X überdecken.

1.4 Bemerkung. *Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas. Es gibt einen größten Atlas $\mathcal{A}_{\max}$, welcher mit $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich ist. Er besteht aus allen Karten φ, welche mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind. Es gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$.* AmD

Zwei Atlanten sind genau dann äquivalent, wenn ihre maximalen Atlanten übereinstimmen. Ein differenzierbarer Atlas prägt einer Menge eine sogenannte differenzierbar Struktur auf. Äquivalente Atlanten sollen dieselbe differenzierbare Struktur liefern. Aus diesem Grund definiert man:

1.5 Definition. *Eine **differenzierbare Struktur** auf einer Menge X ist ein maximaler differenzierbarer Atlas.* DMS

*Eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine Menge mit einer ausgezeichneten differenzierbaren Struktur.*

Alternativ könnte man definieren:

Ein differenzierbare Struktur ist eine volle Äquivalenzklasse von differenzierbaren Atlanten.

Jedenfalls definiert jeder differenzierbarer Atlas $\mathcal{A}$ auch eine differenzierbare Struktur.

Topologie

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren differenzierbare Struktur durch den differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}$ erklärt wurde. Wir nenne die Elemente von $\mathcal{A}_{\max}$ auch einfach differenzierbare Karten.

Einfache Manipulationen mit differenzierbaren Karten:

1) Man kann eine Karte $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ verkleinern: Man nimmt einen offenen Teil $V'_\varphi \subset V_\varphi$, dessen Urbild $U'_\varphi \subset U_\varphi$ und definiert $\varphi' : U'_\varphi \to V'_\varphi$ durch Einschränken.
2) Sei $\sigma : V_\varphi \to V'$ irgendein Diffeomorphismus auf ein andere offene Teilmenge V' des $\mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\sigma \circ \varphi$ eine differenzierbare Karte.

Diese beiden Manipulationen reichen aus, um zu zeigen:

Zu jedem Punkt $a \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Karte φ mit

$$V_\varphi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < 1 \right\}, \quad \varphi(a) = 0.$$

1.6 Definition. *Eine Teilmenge $U \subset X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt* ***offen****, falls es zu jedem $a \in U$ eine differenzierbare Karte φ mit $a \in U_\varphi \subset U$ gibt.* DdO

Man überlegt sich sofort:

Die Definitionsbereiche U_φ der differenzierbaren Karten sind offen.

1) Die leere Menge ist offen, ganz X ist offen.
2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
3) Die Vereinigung beliebig (auch unendlich) vieler offener Mengen ist offen.

Diese sind die Axiome der Topologie, damit wird X ein toplogischer Raum mit den üblichen Folgebegriffen. Beispielsweise heißt eine Menge $M \subset X$ Umgebung eines Punktes $a \in X$, falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $a \in U \subset M$ gibt. Auf dem Umgebungsbegriff beruhen die üblichen topologischen Begriffsbildungen (Konvergenz, Stetigkeit).

Aus den bisherigen Axiomen folgt noch nicht das Trennungsaxiom für X. Wir wollen annehmen, daß dies erfüllt ist und forderen daher im folgenden stets (ohne es jeweils explizit zu formulieren):

In X gilt das Trennungsaxiom: Zu zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ existieren stets disjunkte Umgebungen, $a \in M$, $b \in N$ $(M \cap N = \emptyset)$.

Beispielsweise garantiert das Trennungsaxiom, daß der Limes einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist.

Eine weitere Annahme, die stets erfüllt sei, besagt:

Der Raum X hat abzählbare Basis der Topologie, d.h. es gibt ein abzählbares System offener Mengen $U_1, U_2, \ldots$, so daß jede offene Menge sich als Vereinigung von Mengen dieses Systems darstellen läßt.

Das einfachste Beispiel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist der $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem tautologischen Atlas, welcher nur aus einer einzigen Karte, der Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besteht. Der zugehörige maximale Atlas besteht aus allen Diffeomeorphismen

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad U_\varphi, V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Allgemeiner kann jeder endlich dimensionale reelle Vektorraum V mit einer Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit versehen werden. Man nehme den Atlas aller Vektorraumisomorphismen $V \to \mathbb{R}^n$ als definierenden Atlas.

2. Differenzierbare Abbildungen

2.1 Definition. *Eine Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $f : X \to Y$ heißt differenzierbar, falls sie stetig ist und falls für je zwei differenzierbare Karten φ auf X und ψ auf Y gibt, so daß $\psi \circ \varphi^{-1}$ in einer vollen offenen Umgebung von a im üblichen Sinne differenzierbar ist.* DdA

Wir begehen hierbei wieder einen „Bezeichnungsmißbrauch“: Unter $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ versteht man die Abbildung

$$\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \longrightarrow V_\psi, \quad x \longmapsto \psi(f(\varphi^{-1}(x))).$$

Man beachte, daß die linke Seite offen im $\mathbb{R}^n$ ist. (Um dies zu garantieren, mußte man die Stetigkeit von f mit in die Definition aufnehmen. Trivial aber dennoch fundamental wichtig ist:

2.2 Bemerkung. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Zu jedem $a \in X$ möge ein Kartenpaar φ auf X und ψ auf Y mit $a \in U_\varphi$ und $f(a) \in U_\psi$ existieren, so daß $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist. Dann ist f differenzierbar.* CdA

Hierbei wird benutzt, daß je zwei differenzierbare Karten differenzierbar verträglich sind.

Spezialfälle differenzierbarer Abbildungen sind differenzierbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Hier ist lediglich zu fordern, daß $f \circ \varphi^{-1}$ für alle differenzierbaren Karten differenzierbar ist.

Bezeichnung.

$$\mathcal{C}^\infty(X, Y), \qquad \mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$$

für die Menge der differenzierbaren Abbildungen (Funktionen).

Die folgenden Permanenzregeln sind trivial:

Die identische Selbstabbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist differenzierbar.

Die Zusammensetzung $g \circ f$ differenzierbarer Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ist differenzierbar.

Ebenfalls trivial ist: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, welche wie im vorigen Abschnitt erläutert, als differenzierbare Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. Eine Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann differenzierbar im Sinne der gewöhnlichen reellen Analysis, wenn sie eine differenzierbare Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten ist.

Schließlich erwähnen wir noch, daß jeder offene Teil $U \subset X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit selbst eine naheliegende Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt. Der (maximalen) Atlas von U besteht aus allen Karten des maximalen Atlas von X, deren Defnitionsbereich in U enthalten ist. Die natürliche Inklusion ist differenzierbar.

Schließlich prägen wir noch den Begriff des Diffeomorphismus $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Dies ist eine bijektive Abbildung, so daß sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar ist.

Wir erhalten eine neue Interpretation das maximalen Atlas:

2.3 Bemerkung. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Elemente* dKd *des maximalen Atlas sind nichts anderes als Diffeomorphismen von offenen Teilen von X auf offene Teile eines $\mathbb{R}^n$.*

Dabei sind offene Teile von X und $\mathbb{R}^n$ als differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

Untermannigfaltigkeiten

2.4 Definition. *Eine Teilmenge $Y \subset X$ einer differenzierbaren Mannigfal-* DgT *tigkeit heißt **glatt**, falls es zu jedem Punkt $a \in Y$ eine differenzierbare Karte φ auf X mit $a \in U_\varphi$, $0 \in V_\varphi$, $\varphi(a) = 0$ gibt, so daß*

$$\varphi(Y \cap U_\varphi) = \left\{ x \in V_\varphi, \quad x_{d+1} = \cdots = x_n \right\}$$

mit geeignetem d, $0 \le d \le n$ gilt.

Der Spezialfall n ist zugelassen: Offene Teilmengen von X sind spezielle glatte Mengen. Wir versehen Y mit einer differenzierbaren Struktur: Durch Einschränkung von φ in 2.4 erhält man eine bijektive Abbildung

$$\varphi_0 : Y \cap U_\varphi \longrightarrow \left\{ x \in \mathbb{R}^d; \quad (x, 0, \dots, 0) \in V_\varphi \right\}.$$

Dies ist eine Karte auf Y und die Menge der so definierten Karten bildet einen Atlas. Es ist ziemlich klar, daß dieser Atlas differenzierbar ist. Durch ihn wird Y zu einer differenzierbaren Mannigfaltikeit.

Die natürliche Inklusion $i : Y \to X$, $i(x) = x$, ist differenzierbar, mehr noch. Eine Abbildung $f : Z \to Y$ einer weiteren differenzierbaren Mannigfaltigkeit Z in Y ist genau dann differenzierbar, wenn die Zusammensetzung $i \circ f : Z \to X$ mit der natürlichen Inklusion differenzierbar ist.

Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten heißt eine *Einbettung,* falls es einen glatten Teil $Z \subset Y$ sowie einen Diffeomorphismus $g : X \to Z$ gibt, so daß $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Von besonderer Bedeutung sind glatte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Man spricht auch von eingebetteten Mannigfaltigkeiten im Gegensatz zu den abstrakten Mannigfaltigkeiten. Es läßt sich beweisen, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X diffeomorph zu einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $Y \subset \mathbb{R}^n$ ist, daß als eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (n geeignet) existiert. (Hierbei wird verwendet, daß in X das Trennungsaxiom gilt und daß X abzählbare Basis der Topologie hat.)

3. Tangentialraum

Ein Wesensmerkmal des Begriffs der differenzierbaren Abbildung $f : U \to V$ offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ist die lineare Approximation im Kleinen. Zu jedem Punkt existiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ —vermittelt durch die Jacobimatrix $J(f, a)$— welche f in der Nähe von a gut approximiert. Dieses Konzept will man auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten zur Verfügung haben. Man benötigt dazu für jeden Punkt a einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X einen Vektorraum T_aX und es soll für jede differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung $T_aX \to T_{f(a)}Y$ erklärt werden. Es zeigt sich, daß eine solche Konstruktion möglich und mit sehr einfachen naheliegenden Forderungen sogar eindeutig ist. Wir beginnen damit, diese Forderungen zu formulieren:

3.1 Definition. *Eine **Tangentialraumtheorie** besteht aus folgenden Vorschriften:* DTTa

1. *Jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und jedem Punkt $a \in X$ ist ein reeller Vektorraum T_aX —der sogenannte Tangentialraum— zugeordnet.*
2. *Jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und jedem Punkt $a \in X$ ist eine lineare Abbildung —die sogenannte Tangentialabbildung—*

$$T_af : T_aX \longrightarrow T_{f(a)}Y$$

   zugeordnet.
3. *Jedem endlich dimensionalen Vektorraum V (aufgefaßt als differenzierbare Mannigfaltigkeit) und jedem $a \in V$ ist ein Isomorphismus*

$$V \xrightarrow{\sim} T_aV$$

   zugeordnet.

Folgende Bedingungen sollen erfüllt sein.

a) ***Lokalität:*** *Ist $U \subset X$ ein offener Teil und $i : U \to X$ die natürliche Inklusion, so ist für $a \in U$ die Tangentialabbildung*

$$T_a i : T_a U \xrightarrow{\sim} T_a X$$

ein Isomorphismus.

b) ***Kettenregel:*** *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen, so gilt*

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f.$$

Außerdem seien die Tangentialabbildungen der identischen Selbstabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ die identischen Abbildungen $T_a X \to T_a X$.

c) *Ist $A : V \to W$ eine lineare Abbildung endlich dimensionaler Vektorraäume, so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_a V & \xrightarrow{T_a f} & T_{Aa} W \end{array}$$

kommutativ. (Die Vertikalpfeile sind die Isomorphismen aus 2.

d) ***Anbindung an die Jacobimatrix:*** *Sei $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Für einen Punkt $a \in U$ ist folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J(f,a)} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_a \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_a f} & T_{f(a)} \mathbb{R}^m \end{array}$$

kommutativ.

Wir wollen annehmen, daß eine solche Theorie existiert und einige ihrer Eigenschaften ableiten. Diese führen dann auch zu einem Eindeutigkeits- und Existenzbeweis. Zunächst einmal wollen wir den Isomorphismus $V \to T_a V$ benutzen, um einen Vektorraum mit seinen Tangentialräumen zu identifizieren. Ebenso wollen wir für einen offenen Teil $U \subset X$ die Tangentialräume $T_a U$ und $T_a X$ $(a \in U)$ mittels des Isomorphismus a) identifizieren. Diese Identifikationen werden zu keinen Konflikten führen. Wenn Probleme entstehen sollten, kann man sie jederzeit wieder aufheben.

Nach diesen Identifikationen kann man sagen: Der Tangentialraum einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $a \in U$ ist der $\mathbb{R}^n$,

$$T_a U = \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Für eine differenzierbare Abbildung

$$f : U \to V, \quad U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m \text{ (beide offen)},$$

und einen Punkt $a \in U$ stimmen die Tangentialabbildung und die durch die Jacobimatrix vermittelte linear Abbildung überein:

$$T_a f = J(f, a).$$

Sei $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$, $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine differenzierbare Karte. Wir erhalten für $a \in U_\varphi$ einen Isomomorphismus $T_a X \cong \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist die Dimension von $T_a X$ gleich der Dimension des Kartenblattes V_ϕ. Man nennt

$$\dim_a X = \dim T_a X = n \quad \text{falls} \quad V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

die Dimension von X in a. Man nennt X reindimensional, wenn seine Dimension in allen $a \in X$ gleich ist und man schreibt dann

$$\dim X = \dim_a X.$$

Die Menge der Punkte $X(n)$ einer festen Dimensikon n ist offenbar offen in X. Da X die die disjunkte Vereinigung aller $X(n)$ ist, ist sie auch abgeschlossen (da ihr Komplement offen ist). Zusammenhängende Räume sind dadurch gekennzeichnet, daß sie außer $\emptyset$ und ganz X keine offenen und abgeschlossenen Teile enthalten. Nicht leere zusammenhängende Räune sind daher immer reindimensional.

Wir haben gesehen, daß eine differenzierbare Karte einen Iosmorphismus $T_a X \cong \mathbb{R}^n$ nach sich zieht. Da der Begriff der differenzierbaren Abbildung über Karten definiert wurde, kann man viele Aussagen, der lokalen Theorie auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen, beispielsweise den Satz für umkehrbare Funktionen:

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung und $a \in X$ ein Punkt. Folgende beiden Aussagen sind äquivalent:

1. *Die Tangentialabbildung $f : T_a X \to T_{f(a)} Y$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Es gibt eine offene Umgebung $a \in U$, so daß f einee Diffemomorphismus von U auf eine offene Umgebung von $f(a)$ vermittelt.*

Der Satz für implizite Funktionen kann folgendermaßen formuliert werden.

1. *Die Tangentialabbildung $f : T_a X \to T_{f(a)} Y$ ist injektiv*
2. *Es gibt eine offene Umgebung $a \in U$, so daß f eine Einbettung von U in X vermittelt.*

Richtungsableitung

Sei $u : I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Der Vektor $\dot{u}(t)$ beschreibt die Richtung der Kurve u zum Parameterwert t. Diese kann man sofort auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Sei $u : I \to X$ eine differenzierbare Kurve in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dazu sollte eigentlich $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall sein, da nur offene Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Man kann jedoch den Begriff sofort auf nicht notwendig offene Intervalle ausdehnen. Wir übergehen dies und nehmen der Einfachheit halber an, I sei ein offenes Intervall. Man kann dann die Tangentialabbildung

$$T_t u : T_t I \longrightarrow T_{u(t)} X.$$

betrachten. Wir benutzen die Identifizierung von $\mathbb{R}$ mit $T_a I$ und können dann $(T_t u)(1)$ betrachten. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$, so kann man $T_{u(t)} X$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren Man bestätigt danach sofort

$$\dot{u}(t) = (T_t u)(1).$$

Dies führt zu folgender

3.2 Definition. *Sei $u : I \to X$ eine differenzierbare Kurve in der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Man definiert für $t \in I$* DTp

$$\dot{u}(t) = (T_t u)(1).$$

*und nennt dies den **Tangentialvektor** von u zum Parameterwert t.*

Aus der lokalen Theorie folgert man:

3.3 Bemerkung. *Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor. Es gibt eine glatte Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$. Jeder Tangentialvektor ist also Tangentialvektor einer geeigneten Kurve.* BTk

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$ ein Punkt und $A \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung A versteht man

$$\frac{d}{dt} f(a + tA)\Big|_{t=0}.$$

Sei nun anstelle $a + tA$ eine Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$ gegeben. Mittesl der Kettenregel zeigt man

$$\frac{d}{dt} f(a + tA)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(u(t))\Big|_{t=0}.$$

Damit ist nahegelegt, wie man den Begriff der Richtungsableitung auf Mannigfaltigkeiten definiert.

3.4 Bemerkung und Definition. *Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $A \in T_aX$ ein Tangentialvektor. Wir wählen eine glatte Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so hängt* BDr

$$A(f) := \frac{d}{dt} f(u(t))\big|_{t=0}$$

nicht von der Wahl von u ab. Man nennt $A(f)$ die Richtungsableitung von f in Richtung A.

Damit haben wir jedem Tangentialvektor $A \in T : aX$ eine Abbildung

$$\mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto A(f),$$

zugeordnet. Allgemeiner erhalten wir für jede offene Umgebung $a \in U \subset X$ die Abbildung

$$\mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto A(f) \qquad (A \in T_aX).$$

Welche Abbildungen bekommt man auf diese Weise? Unmittelbar klar ist, daß die Produktregel $A(fg) = f(a)A(g) + g(a)A(f)$ gelten muß.

3.5 Definition. *Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigekit. Eine **Derivation** in a ist eine Familie von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen* DDe

$$D_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (a \in U \subset X \ \textit{offen})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *Ist $a \in V \subset U$ eine kleinere offene Umgebung, so gilt*

$$D_V(f|V) = D_U(f)|V \quad \textit{für} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

2. *Es gilt die Produktregel*

$$D_U(fg) = f(a)D_U(g) + g(a)D_U(f).$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_{X,a}, \mathbb{R})$ die Menge aller Derivationen von X in a. Dies ist ein reeller Vektorraum. Wie wir gesehen haben, definiert die Richtungsableitung eine Derivation. Es gilt mehr:

3.6 Satz. *Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannifaltigkeit. Die Abbildung* SRa

$$T_aX \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_{X,a}, \mathbb{R}), \quad A \longmapsto \textit{Richtungsableitung},$$

ist ein Isomorphismus.

Damit ist bewiesen, daß eine Tangentialraumtheorie im wesentlichen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist und es wird ein Existenzbeweis nahegelegt.

3.7 Definition. DTT

$$T_aX := \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty_{X,a}, \mathbb{R}).$$

Es ist auch klar, wie man die Tangentialabbildung

$$T_f : T_aX \longrightarrow T_{f(a)}Y \qquad (f : X \longrightarrow Y,\ a \in X)$$

zu definieren hat. Sei $D \in T_aX$ man will $D' = T_f(f)$ definieren. Dazu muß man einer Funktion $g \in \mathcal{C}(V)$, $f(a) \in V \subset Y$ eine Zahl zuordnen. Man definiert

$$D'(g) = D(f \circ g).$$

Entscheidend ist, daß im Falle $\mathbb{R}^n$ das richtige herauskommt. Spezielle Elemente von $\operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n,a}, \mathbb{R})$ sind die partiellen Ableitungen im Punkt a:

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big]_a : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \qquad (a \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

3.8 Hilfssatz. *Die Abbildung* HTr

$$\mathbb{R}^n \overset{\sim}{\longrightarrow} \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n,a}, \mathbb{R}), \quad A \longmapsto \sum_{i=1}^n A_i \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\Big]_a,$$

ist ein Isomorphismus.

Der Beweis ergibt auch aus folgenden beiden Beobachtungen:

1) Sei $f = gh$ mit $g(a) = h(a) = 0$. Aus der Produktformel folgt $D(f) = 0$ für jede Derivation D in a.

2) Sei f die Funktion konstant 1. Aus $f^2 = f$ und der Produktformel folgt $D(f) = 0$ für jede Derivation D. Insbesondere gilt $D(f) = 0$ für jede konstante Funktion.

2) Aus der Taylorschen Formel kann man folgern, daß f (in einer konvexen Umgebung von a) eine Darstellung der Form

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g_i(x) \quad \text{mit} \quad g_i(a) = 0.$$

Wichtig hierbei ist, dass die Funktion g_i wieder differenzierbar sind. Dies folgt aus den expliziten Darstellungen des Restglieds in der Taylorschen Formel durch ein Integral in Vebindung mit der Leibnizschen Regel (Vertauschung von Differentiation mit Integration). Somit ist die Wirkung einer Derivation in a durch den linearen Teil der Taylorformel bestimmt. □

Hilfssatz 3.8 zeigt allgemeiner, daß für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V durch die Richtungsableitung ein Isomorphismus

$$V \overset{\sim}{\longrightarrow} \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty_{V,a}, \mathbb{R})$$

gegeben wird.

3.9 Satz. *Durch* DTt

$$T_aX := \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty_{X,a}, \mathbb{R})$$

mit obigen Tangentialabbildungen T_af *und den angegebenen Isomorphismen* $V \cong T_aV$ *(Richtungsableitung) wird eine Tangentialraumtheorie definiert.*

Der Beweis folgt aus 3.8 . □

4. Das Tangentialbündel

Seien X, X' zwi differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ist (U, φ) eine differenzierbare Karte auf X und (U', φ') eine ebensolche von X', so ist

$$\varphi \times \varphi' : U \times U' \longrightarrow V \times V'$$

eine Karte auf $X \times X'$. Wir identifizieren hierbei $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ auf naheliegende Weise mit $\mathbb{R}^{n+m}$. Man zeigt leicht, daß hierdurch ein differenzierbarer Atlas auf $X \times X'$ definiert wird und daß die so definierte differenzierbare Mannigfaltigkeit $X \times X'$ folgende universelle Eigenschaft besitzt:

4.1 Bemerkung. *Das kartesische Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten* X, Y *hat folgende universelle Eigenschaft:* UeK

a) *Die beiden Projektionen*

$$X \times Y \longrightarrow X, Y, \quad p(x, y) = x, \ q(x, y) = y,$$

sind differenzierbar.

b) *Eine Abbildung* $Z \to X \times Y$ *einer dritten differenzierbaren Mannigfaltigkeit* Z *in* $X \times Y$ *ist genau dann differenzierbar, wenn die Zusammenseztzungen mit den beiden Projektionen* $Z \to X$, $Z \to Y$ *differenzierbar sind.*

Der Beweis ist klar. □

Die beiden Projektionen induzieren Tangentialabbildungen

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX, \ T_bY,$$

die man zu einer Abbildung

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX \times T_bY$$

zusammenfassen kann. Ebenfalls klar ist

4.2 Bemerkung. *Die natürliche Abbildung* TkP

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX \times T_bY,$$

ist ein Isomorphismus.

Eine ähnliche Konstruktion ist die des Tangentialbündels TX einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Als Menge besteht TX aus Paaren (a, A) mit $a \in X$ und $A \in T_aX$. Man hat eine kanonische Projektion

$$\pi : TX \longrightarrow X.$$

Ist $\varphi : U \to V$ eine differenzierbare Karte auf X, so erhält man für jedes $a \in U$ einen Isomorphismus

$$T_aX = T_aU \longrightarrow T_{\varphi(a)}V = \mathbb{R}^n$$

. damit erhält man eine bijektive Abbildung

$$\pi^{-1}U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Die Menge all dieser Karten definiert offenbar einen differenzierbaren Atlas auf TX.

4.3 Bemerkung. *Das Tangentialbündel TX einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit trägt eine natürliche Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit.* TBm

Die Projektion $TX \to X$ ist differenzierbar. Diese und ähnliche Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Konstruktion des Atlas.

5. Vektorfelder

5.1 Definition. *Ein Vektorfeld A auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine Abbildung, welche jedem $a \in X$ einen Tangentialvektor $A_a \in T_aX$ zuordnet.* DVf

Man kann Vektorfelder in naheliegender Weise addieren und mit Funktionen multiplizieren,

$$(A + B)_a = A_a + B_a, \quad (fA)_a = f(a)A_a.$$

Man kann sie auf offene Teile einschränken und man Difeomorphismen $f : X \to Y$ benutzen, um so von X auf Y und umgekehrt zu transformieren. Ist $\subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a\Big)_{a\in U}$$

ein Vektorfeld und jedes andere Vektorfeld kann in der Form

$$A = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit einem n-Tupel von Funktionen geschrieben werden.

Ist φ eine Karte auf X, A ein Vektorfeld auf X, so gilt insbesondere

$$A|U_\varphi \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Man nennt die Funktionen

$$f^i : V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n,$$

die Komponenten das Vektorfeldes bezüglich des Koordinatensystems $x = \varphi(a)$. Es ist wichtig zu wissen, wie die Komponenten bei Kartenwechsel umzurechnen sind. Eine einfache Anwendung der Kettenregel besagt:

5.2 Bemerkung. *Sei A ein Vektorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Seien φ, ψ zwei Karten auf X mit Kartentransformationsabbildung $\gamma = \psi\varphi^{-1}$. Seien $f^1, \dots, f^n$ bzw. $g^1, \dots, g^n$ die Komponenten von A bezüglich φ bzw. ψ. Es gilt die Umsetzungsformel* VdM

$$g^i(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_j} f^j(x) \qquad (y = \gamma(x)).$$

Ist umgekehrt jeder Karte aus einem geeigneten Atlas ein n-Tupel von Funktionen zugeordet, das sich genau so umsetzt, so sind dies die Komponenten eines eindeutig bestimmten Vektorfelds.

Ein Vektorfeld heißt differenzierbar, wenn sein Komponenten bezüglich beliebiger Karten (aus einem Atlas genügt) sind. Differenzierbare Vektorfelder kann man addieren und mit differenzierbaren Funktionen multiplizieren. Man kann sie auf offene Teile einschränken und unter Diffemomorphismen transformieren.

Es gibt eine andere Deutung von Vektorfeldern. Sei A Vektorfeld auf X. Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Teil $U \subset X$, so kann man die Funktion

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(a) := A_a(f)$$

betrachten. Wir schreiben der Einfachheit halber $g = A_U(f)$ für diese Funktion.

5.3 Bemerkung. *Ein Vektorfeld ist genau dann differenzierbar, wenn die Funktion $A_U(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ($U \subset X$ offen) differenzierbar ist.* VdK

Der Beweis ist einfach und wird übergangen. Differenzierbare Vektorfelder induzieren also insbesondere Abbildungen

$$A_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U).$$

Es ist klar, daß diese einer Derivationsregel genügen. Wir werden dazu geführt, die Menge $\mathrm{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ einzuführen:

5.4 Definition. *Die Menge* $\mathrm{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ *besteht aus allen Familien von Abbildungen* DDd

$$A_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad U \subset X \text{ offen}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *Sie ist verträglich mit Restriktion*

$$A_U(f)|V = A_V(f|V) \qquad (V \subset U \subset X).$$

2. *Es gilt die Derivationsregel*

$$A_U(fg) = fA_U(g) + gA_U(f).$$

Man zeigt nun leicht.

5.5 Bemerkung. *Die Zuordnung $A \mapsto (A_U)_U$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der differenzierbaren Vektorfelder und der Menge der Derivationen* $\mathrm{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$. VfD

Eine schöne Anwendung dieser Uminterpretation von Vekrofeldern ist die Definition der Lieklammer. Sind A, B zwei Elemente von $\mathrm{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ so ist offenbar $A_U \circ B_U$ in der Regel keine Derivation. Jedoch rechnet man sofort nach, daß

$$A_U \circ B_U - B_U \circ A_U$$

wieder eine Derivation definiert. Wir erhalten:

5.6 Bemerkung. *Es gibt eine eindeutige Abbildung, welche zwei differenzierbaren Vektorfeldern A, B ein drittes $[A, B]$ zuordnet, so daß für die zugeordneten Derivationen gilt:* DLk

$$[A, B]_U = A_U \circ B_U - B_U \circ A_U.$$

Man nennt $[A, B]$ die Lieklammer der beiden Vektorfelder. Genau dann ist die Lieklammer 0, wenn die beiden Derivationen miteinander vertauschbar sind. Beispielsweise gilt im Falle $X = \mathbb{R}^n$

$$\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] = 0.$$

Dies ist eine Spezialfall der allgemeinen Regel

$$\Big[\sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_i g^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big] = \sum_i \Big(\sum_j f^j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g^j \frac{\partial f^i}{\partial x_j}\Big) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

welche man ebenfalls zur Definition der Lieklammer verwenden könnte.

6. Differentiale (Kovektorfelder)

Zur Erinnerung: Sei V ein Vektorraum. Der Dualraum V^* von V ist die Menge aller Linearformen auf V. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V, so ist die duale Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ ist durch

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

definiert.)

6.1 Definition. *Ein* ***Kovektorfeld*** ω *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine Abbildung, welche jedem $a \in X$ ein Element des Dualraums des Tangentialraums zuordnet, $\omega_a \in T_a^* X$.* KVf

Sei $u : I \to X$ eine glatte Kurve und ω ein Kovektorveld auf X. Man kann dann die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \omega_{u(t)}(\dot{u}(t)),$$

betrachten. Man schreibt für deren Integral —sofern es existiert—

$$\int_u \omega := \int_I \omega_{u(t)}(\dot{u}(t))\, dt.$$

man nennt dieses Integral das *Kurvenintegral* von ω längs u. Man kann Kovektoren also längs Kurven integrieren. Man nennt aus diesem Grunde Kovektoren auch *Differentiale.*

Dies wird auch gerechtfertigt durch den Spezialfall, wo $X = U$ offener Teil des $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $a \in U$. Wir bezeichnen mit

$$dx_1|_a, \dots, dx_n|_a$$

die duale Basis von $[\partial/\partial x_i]_a$.
Mit dx_i wird das Kovektorfeld $a \mapsto dx_i|_a$ bezeichnet. Damit ist jeder Kovektorfeld auf U von der Form

$$\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n.$$

Das Kurvenintegral ist in diesem Falle gerade

$$\int_u \omega = \int_I \sum_i f(u(t))\dot{u}(t)\,dt,$$

als das schon früher betrachtete Kurvenintegral. Dadurch wird die Bezeichung dx_i gerechtfertigt.

Die Rechenregeln für Kovektorfelder sind denen der Vektorfelder analog (Addition, Multipliktion mit Funktionen, Einschränken auf offene Teile und Transformation bei Diffeomorphismen. Man kann auch die Komponenten eines Differentials ω auf X bezüglich einer Karte einführen:

$$\omega|U_\varphi \longleftrightarrow f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n.$$

Die Umsetzungsformel der Komponenten kann man leicht berechnen und erhält:

6.2 Bemerkung. *Sei ω ein Differential auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Seien φ, ψ zwei Karten auf X mit Kartentransformationsabbildung $\gamma = \psi\varphi^{-1}$. Seien $f_1, \dots, f_n$ bzw. $g_1, \dots, g_n$ die Komponenten von ω bezüglich φ bzw. ψ. Es gilt die Umsetzungsformel* VdM

$$g_i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j(x)}{\partial x_i} f_j(x) \qquad (y = \gamma(x)).$$

Ist umgekehrt jeder Karte aus einem geeigneten Atlas ein n-Tupel von Funktionen zugeordet, das sich genau so umsetzt, so sind dies die Komponenten eines eindeutig bestimmten Vektorfelds.

Wir merken an, daß die Transformation mit der transponierten Funktionalmatrix und nicht mit der Funktionalmatrix selbst wie bei Vektorfeldern vollzogen wird.

Zurückziehen von Differentialen

In einem unterscheiden sich Kovektorfelder von Vektorfeldern. Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, ω ein Differential auf Y. man kann dann in naheliegender Weise eine Differentialform ω' auf X definieren. Ist $a \in X$, so hat man die Tangentialabbildung $T_aX \to T_{f(a)}Y$. Diese kann man mit der Linearform $\omega_{f(a)} : T_{f(a)}Y \to \mathbb{R}$ zusammensetzen und erhält so eine Linearform $\omega'_a : T_aX \to \mathbb{R}$. Wir bezeichnen das so gewonnene Differential mit $f^*\omega$ und nennen es das zurückgezogene Differential.

6.3 Satz. *Es gibt eine Vorschrift, welcher jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ und jedem Differential ω auf Y ein Differntial $f^*\omega$ auf X zuordnet. Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften und ist durch diese bestimmt:* DZd

1. *Sie genügt der Ketttenregel bezüglich der Zusammensetzung differenzierbarer Abbildungen $f : X \to Y$, $f : Y \to Z$, d.h.*

$$g^*(f^*\omega) = (g \circ f)^*\omega \qquad (\omega \text{ auf } Z).$$

2. *Ist $U \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion einer offenen Teilmenge, so bedeuten Zurückziehen und natürliches Einshcränken dasselbe.*
3. *Ist φ ein Karte auf X und sind $f_1, \dots, f_n$ die Komponenten eines Differentials ω, so gilt*

$$\omega|U_\varphi = \varphi^*(f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n).$$

4. *Ist $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, so gilt*

$$f^*(dy_j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} dx_n.$$

4. *Außerdem gelten die Regeln*

$$f^*(\omega + \omega') = f^*(\omega) + f^*(\omega'), \quad f^*(h\omega) = hf^*(\omega).$$

Ein weiteres Indiz für die Nützlichkeit des Konzeptes „Differential“ ist

6.4 Bemerkung. *Seien $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung, ω ein Differential auf Y und $u : I \to X$ eine glatte Kurve. Dann gilt* ZKi

$$\int_{f \circ u} \omega = \int_u f^*\omega$$

(Existenz der Integrale vorausgesetzt).

Der Beweis ist trivial.

7. Tensorfelder

7.1 Hilfssatz. *Seien $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume (über irgend einem Körper).* DtP
Dann existieren ein Vektorraum V und eine multilineare Abbildung

$$B : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *V wird von dem Bild von B erzeugt.*
2. *Ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren*

$$e_1^{(i)}, \dots, e_{m_i}^{(i)}$$

gegeben, so sind die $m_1 \cdots m_n$ Vektoren

$$B(e_1^{(i)}, \dots, e_{m_i}^{(i)})$$

linear unabhängig.

Das Paar (V, B) ist in folgendem Sinne eindeutig bestimmt: Ist (V', B') ein weiteres Paar, so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\sigma : V \to V'$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dd, "\sigma"] \\ V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B'"'] & \\ & V' \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

da σ eindeutig ist, spricht man auch von kanonischer Isomorphie, was fast soviel wie Gleichheit bedeutet. Wir denken uns ein Paar (V, B) ausgewählt und bezeichnen dieses mit

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad B(v_1, \cdots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Es gilt

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_n).$$

Eine lineare Abbildung

$$L : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W$$

in irgendeinen Vektorraum W ist durch die Kenntniss der Bilder der $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ eindeutig bestimmt. Häufig definiert man eine solche lineare Abbildung dadurch, daß man eine Formel

$$L(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = F(v_1, \dots, v_n)$$

hinschreibt. Man muß jedoch bedenken, daß zwischen den Elementen $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ lineare Relationen bestehen. Dennoch funktioniert diese Vorgehensweise häufig dank:

Universelle Eigenschaft. *Sei*

$$F : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine ***multilineare*** *Abbildung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbiildung L, welche das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "F"] \arrow[dr] & W \\ & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[u, "L"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Das Tensorprodukt ist in folgendem Sinne assoziativ.

7.2 Hilfssatz. *Seien $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume, $0 < a < n$. Es existiert ein eindeutig bestimmter Ismomorphismus* AsT

$$\begin{aligned}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_a) \otimes (V_{a+1} \otimes \cdots \otimes V_n) &\xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_a) \otimes (v_{a+1} \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n.\end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt leicht mittels der universellen Eigenschaft. □

Ebenfalls klar ist die Kommutativität des Tensorprodukts in folgendem Sinne:

7.3 Hilfssatz. *Seien $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume und σ eine Permutation der Ziffern $1, \dots, n$. Es existiert ein eindeutig bestimmter Ismomorphismus* KoT

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Zu einem Vektorraum V betrachtet man den Raum der p-fach kontra- und q-fach kovarianten Tensoren:

$$T^{p,q}V := \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q}$$

Sie Fälle $p = 0$ und $q = 0$ sind zugelassen. Dies ist so zu verstehen:

$$T^{p,0}V = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p}, \qquad T^{0,q}V = \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q}.$$

Insbesondere ist $T^{1,0} = V$ und $T^{(0,1)} = V^*$. Ergänzend definiert man

$$T^{0,0}V := K \quad \text{(Grundkörper)}.$$

Sei $e_1, \dots e_n$ eine Basis von V. dann bilden die n^{p+q} Vektoren

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_q}$$

Basis von $T^{p,q}$. Jeder (p,q)-Tensor A besitzt also eine Darstellung

$$A = \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_p \le n \\ 1 \le j_1, \dots, j_q \le n}} C^{i_1, \dots, i_p}_{j_1 \dots, j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_q}.$$

Man nennt die Koeffizienten $C^{i_1, \dots, i_p}_{j_1 \dots, j_q}$ die Komponenten von A bezüglich der vorgelegten Basis.

Transformationsformalismus der Tensorkomponenten

Sei ein Vektorraumisomorphismus $\sigma : V \to W$ gegeben. Die duale Abbildung $W^* \to V^*$ ist dann ebenfalls ein Isomorphismus. Man kann diesen umkehren und erhält damit Isomorphismen

$$V \xrightarrow{\sim} W, \quad V^* \xrightarrow{\sim} W^*.$$

Diese ziehen Isomorphismen

$$\sigma : T^{p,q}(V) \xrightarrow{\sim} T^{p,q}(W)$$

nach sich, welche wir der Einfachheit halber einfach mit σ bezeichnen. Sei nun $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V und $f_1, \dots, f_n$ eine Basis von W. Es stellt sich die Frage, wie die Komponenten eines Tensors $T \in V^{p,q}$ bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ mit denen von $\sigma(T) \in W^{p,q}$ bezüglich $f_1, \dots, f_n$ zusammenhängen.

Nebenbei bemerkt: Im Falle $V = W$, $\sigma =$id bedeutet dies Frage einfach, wie die Komponenten ein und desselben Tensors von der Wahl der Basis abhängen.

Dazu muß man daran erinnern, wie man dem Isomorphismus $V \to W$ eine Matrix zuordnet. Wir erinnern daran, wie man ganz allgemein einer linearen Abbildung

$$L : V \longrightarrow W, \quad e_1, \dots, e_n \text{ Bais von } V, \quad f_1, \dots, f_m \text{ Bais von } W$$

eine Basis zuordnet. Man benutzt die Basen, um Isomorphimsen

$$V \cong K^n, \quad W \cong K^m$$

herzustellen. Bei diesen werden die vorgegebenen Basen einfach auf die Standardbasen abgebildet. Danach induziert L eine lineare Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m.$$

Es gibt nun eine Matrix A von m Zeilen und n-Spalten, so daß diese Abbildung von der Form

$$x \longmapsto A \cdot x$$

ist, wobei $x \in K^n$ als Spaltenvektor zu schreiben ist und $A \cdot x$ im Sinne des Matrizenprodukts zu verstehen ist. Schreibt man $y = A \cdot x$, so bedutet dies

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m).$$

Man kann nun nachrechnen, daß die Matrix A auch folgendermaßen definiert werden kann:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \quad (1 \leq i \leq n).$$

Man beachte, daß in den beiden Formeln einmal a_{ij} und einmal a_{ji} auftritt. Diese „Kontragedienz" liegt in der Natur der Sache.

Zurück zu unserem Isomorphismus $\sigma : V \to W$. Die zugeordnete Matrix sei A. Man weiß und kann leicht nachrechnen, daß die zugeordnete Matrix der dualen Abbildung $W^* \to V^*$ durch die transponierte Matrix A' gegeben ist, ihre Umkehrung wird also durch ${A'}^{-1}$ gegeben. Entsprechend gilt

$$\sigma(e_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j^* \quad \text{mit} \quad B := A^{-1}.$$

Wir wenden nun σ auf einen Tensor

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} C_{j_1 \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^*$$

stur an, um die Komponenten des Bildtensors

$$\sigma(A) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} D_{j_1 \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^*$$

zu ermitteln. Aus der Formel

$$\sigma(A) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ 1 j_1, \dots, j_q}} C_{j_1 \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

$$\sum_{\nu_1} a_{\nu_1 i_1} f_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{\nu_p} a_{\nu_p i_p} f_{\nu_p} \otimes \sum_{\mu_1} b_{j_1 \mu_1} f_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \sum_{\mu_q} b_{j_q \mu_q} f_{\mu_q}$$

folgt:
$$D^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q} = \sum a_{i_1\nu_1}\cdots a_{i_p\nu_p} b_{\mu_1 j_1}\cdots b_{\mu_p j_p} C^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}.$$
Wir werden weiter unten sehen, daß es sinnvoll ist, in a_{ij} den ersten Index i nach oben zu setzen, also a^i_j anstelle a_{ij} zu schreiben, entsprechend b^i_j anstelle b_{ij}. Die Transformationsformel lautet dann

$$D^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q} = \sum a^{i_1}_{\nu_1}\cdots a^{i_p}_{\nu_p} b^{\mu_1}_{j_1}\cdots b^{\mu_p}_{j_p} C^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}.$$

Die sogenannte Einsteinkonvention besagt, daß man über doppelt vorkommende Indizes automatisch zu summieren hat, wenn der eine oben und der andere unten steht. Mit dieser Konvention lautet die Tensortransformationsformel
$$D^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q} = a^{i_1}_{\nu_1}\cdots a^{i_p}_{\nu_p} b^{\mu_1}_{j_1}\cdots b^{\mu_p}_{j_p} C^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}.$$

7.4 Definition. *Unter einem Tensorfeld A vom Typ (p,q) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versteht man eine Vorschrift, welche jedem $a\in X$ ein Element* DtF
$$A_a \in T^{p,q}(T_aX)$$
zuordnet.

Tensorfelder vom Typ $(0,0)$ sind also nichts anderes als Funktionen (Physiker nennen sie Skalare), Tensorfelder vom Tyo $(1,0)$ sind Vektorfelder und Tensorfelder vom Typ $(0,1)$ sind Differentiale.

Man kann Tensorfelder gleichen Typs addieren und mit Funktionen multiplizieren. Man kann sie auf offene Teile einschränken und mit Diffeomorphismen transformieren. Wie in diesen Spezialfällen kann man damit Tensorfelder auch durch Komponenten beschreiben. Ist φ eine Karte, so entspricht der Tensor $A|U_\varphi$ dank des Diffeomorphismus $U_\varphi\to V_\varphi$ einem Tensor auf dem Kartenblatt V_φ Hier ist eine ausgezeichnete Basis vorhanden. Bezüglich dieser Basis kann man die Tensorkomponenten betrachten. Dies sind nun Funktionen

$$f^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}(x)$$

auf dem Kartenblatt V_φ. Genauer gilt

$$A|U_\varphi \longleftrightarrow \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_q\le n}} f^{j_1\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\otimes dx_{j_1}\otimes\cdots\otimes dx_{j_q}.$$

Sei ψ eine zweite Karten und

$$A|U_\psi \longleftrightarrow \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le n\\ 1\le j_1,\dots,j_q\le n}} g^{j_1\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(y)\,\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y_{i_p}}\otimes dy_{j_1}\otimes\cdots\otimes dy_{j_q}$$

die entsprechende Komponentendarstellung. Die Umrechnung erfolgt nun mittels des Transformationsformalismus, wobei anstelle der Matrix A die Jacobimatrix

$$J(\gamma, x) = \big(a^i_j(x)\big)_{ij}$$

tritt. Die Komponenten der inversen Jacobimatrix werden entsprechend mit $b^i_j(x)$ bezeichnet. Die Transformationsformel lautet nun

$$g^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}(y) = a^{i_1}_{\nu_1}(x)\cdots a^{i_p}_{\nu_p}(x) b^{\mu_1}_{j_1}(x)\cdots b^{\mu_p}_{j_p}(x) f^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}(x).$$

Auch diese Formel kann man noch mehr oder weniger vereinfacht schreiben. Man läßt den Buchstaben γ fallen, indem man anstelle $y = \gamma(x)$ einfach $y = y(x)$ schreibt. Für die Umkehrfunktion von γ schreibt man entsprechend $x = x(y)$. Damit ist

$$a^i_j(x) = \frac{\partial y^i}{\partial x_j}.$$

Die Jacobimatrix der Umkehrfunktion ist die inverse Matrix

$$b^i_j(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y_j}.$$

Die Transformationsformel lautet somit

$$g^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}(y) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x_{\nu_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x_{\nu_p}}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y_{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y_{j_q}} f^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}(x).$$

In der Physik wird noch eine weitere Vereinfachung verwendet: $g^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}(y)$ und $f^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}(x)$ sind die Komponenten ein- und desselben Tensors A. Warum soll man zwei unterschiedliche Funktionssymbole f und g benutzen. Man schreibt also einfach $A^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}(x)$ für die Komponenten des Tensors bezüglich der Karte x und entsprechend für y. Die Transformationsformel hat jetzt die Form

$$A^{i_1,\dots,i_p}_{j_1\dots,j_q}(y) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x_{\nu_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_p}}{\partial x_{\nu_p}}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y_{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y_{j_q}} A^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1\dots,\mu_q}(x).$$

Die folgende Bemerkung führt zu der meist in der Physik verwendeten Definition eines Tensorfeldes.

7.5 Bemerkung. *Ist jeder differenzierbaren Karte ein Tuple von Komponentenfunktionen zugeordnet, welches der Tensortransformationsformel genügt, so existiert ein eindeutig bestimmtes Tensorfeld mit diesen Komponenten.* DTk

Wir übergehen den Beweis.

7.6 Definition und Bemerkung. *Ein Tensorfeld heißt differenzierbar, wenn seine Komponenten bezüglich beliebiger differentierbarer Karten differenzierbar sind. Es genügt dies für einen Teilatlas des maximalen Atlas zu fordern.* Tdd

8. Tensorrechnung

Tensorrechnung beruht meist auf einfachen algebraischen Regeln des Tensorprodukts. Wir nehmen in diesem Abschnitt an, daß alle Vektorräume endlichdimensional sind.

Sei $B : A \times B \to C$ eine bilineare Abbildung. Dann werden lineare Abbildungen

$$A \longrightarrow \operatorname{Hom}(B, C) \quad \text{und} \quad B \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, C)$$

induziert, bei der ersten beispielsweise wird einem Element $a \in A$ die lineare Abbildung

$$B \longrightarrow C, \quad b \longmapsto B(a, b),$$

zugeordnet. Inbsondere erhält man für eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K$$

zwei natürliche Abbildungen

$$V \longrightarrow V^*.$$

Wenn die Bilinearform symmetrisch ist, stimmen beide überein. Dies ist der uns am meisten interessierende Fall.

Eine Bilinearform auf V heißt nicht ausgeartet, falls die beiden induzierten Abbildungen $V \to V^*$ injektiv sind (eine genügt). Aus Dimensionsgründen ist sie dann ein Isomorphismus.

Eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V induziert einen natürlichen Isomorphismus $V \to V^*$ und umgekehrt.

Wir betrachten die natürliche Paarung

$$V \times V^* \longrightarrow K, \quad (v, l) \longmapsto l(v).$$

Sie induziert eine lineare Abbildung $V \to V^{**}$.

Es existiert eine natürliche lineare Abbildung

$$V \longrightarrow V^{**}.$$

Sie ist (für endlich dimensionales V) ein Isomorphismus.

Wir verwenden für den Vektorraum der multilinearen Abbildungen die Bezeichnung

$$\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_n, W).$$

Due universelle Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts bewirkt eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_n, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W),$$

im Spezialfall $W = K$

$$\mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_n, K) \longrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*,$$

Mit Hilfe von Basen verifiziert man leicht, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist.

Mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts zeigt man, daß die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} V_1 \otimes \dots \otimes V_n \times V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* &\longrightarrow K, \\ (v_1 \otimes \dots \otimes v_n, l_1 \otimes \dots \otimes l_n) &\longmapsto l_1(v_1) \cdots l_n(v_n), \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Sie induziert eine lineare Abbildung

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)^*,$$

welche offenbar ein Isomorphismus ist. Damit erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_n, K) \cong V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*.$$

Ersetzt man hierin V_i durch V_i^*, so erhhält man eine kanonische Isomorphie

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \cong \mathrm{Mult}(V_1^*, \dots, V_n^*, K).$$

So hätte man das Tensorprodukt (im endlichdimensionalen Fall) auch einführen können. Ein Spezialfall besagt

$$T^{p,q}V = \mathrm{Mult}(\overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^{p} \times \overbrace{V \times \dots \times V}^{q}, K).$$

Auch diese Formel wird gelegentlich zur Definition gemischter Tensoren eingeführt.

Ein nützliche Idenfikation ist auch die kanonische Isomorphie

$$V \otimes V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, V), \quad v \otimes l \longmapsto [x \mapsto l(x)v].$$

Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V und sind C_j^i die Komponenten eines Tensors $A \in T^{1,1}V$, so ist

$$(C_j^i)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

die Matrix der entsprechenden linearen Abbildung. Wegen dieser kanonischen Isomorphie werden im Zusammenhang mit Tensorrechnung Matrizen linearer Abbildungen häufig in dieser Form geschrieben (ein Inex unten einer oben).

Übrigens entspricht der Spurabbildung $\mathrm{Hom}(V, V) \to K$ einafch der linearen Abbildung

$$V \otimes V^* \longrightarrow K, \quad v \otimes l \longmapsto l(v).$$

Besonders wichtig ist die kanonische Isomorphie

$$\mathrm{Bil}(V \times V, K) \cong V^* \otimes V^* = T^{0,2}V.$$

Bilinearformen und zweifach kontravariante Tensoren sind dasselbe.

Wir behandeln noch eine Verallgemeinerung der Spurabbildung, die *Verjüngung:* Seien p, q beide ≥ 1. Man kann dann die lineare Abbildung

$$V_1^1 : T^{p,q} \longrightarrow T^{p-1,q-1},$$
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes l_1 \cdots \otimes l_q \longmapsto l_1(v_1)\, v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes l_2 \cdots \otimes l_q,$$

betrachten. Allgemeiner defniert man für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$ in naheliegender Weise

$$V_i^j : T^{p,q} \longrightarrow T^{p-1,q-1}, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes l_1 \cdots \otimes l_q \longmapsto l_i(v_j) \ldots .$$

Einige Rechenregeln für Tensoren (und Tensorfelder)

Die folgenden Rechenregeln für Tensoren beruhen alle auf einfachen Eigenschaften des algebraischen Tensorprodukts.

1. Man kann Tensorfelder desselben Typs addieren. Bezüglich einer Basisdarstellung bedeutet dies komponentenweise Addition.
2. Man kann Tensorfelder verschiedenen Typs multiplizieren. Abstrakt beruht dies auf den kanonischen Isomorphismen

$$T^{p,q} \otimes T^{p',q'} \xrightarrow{\sim} T^{p+p',q+q'}, \quad v_1 \otimes v_p \otimes l_1 \otimes l_q \;\otimes\; v_1' \otimes v_{p'}' \otimes l_1' \otimes l_{q'}'$$
$$\longmapsto v_1 \otimes v_p \otimes v_1' \otimes v_{p'}' \otimes l_1 \otimes l_q \otimes l_1' \otimes l_{q'}'$$

   Das Produkt eines (p,q)-Tensorfelds mit einem (p',q')-Tensorfeld ist also ein $(p+p', q+q')$-Tensorfeld. Für die Komponenten bedeutet dies einfach die Bildung

$$C^{i_1,\ldots i_p,\nu_1,\ldots,\nu_{p'}}_{j_1,\ldots,j_q,\mu_1,\ldots,\mu_{q'}} = A^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} B^{\nu_1,\ldots,\nu_{p'}}_{\mu_1,\ldots\mu_{q'}}.$$

   Im Falle $p = q = 0$ its dies die gewöhnliche Multiplikation mit Skalaren. Insbesondere kann man Tensorfelder mit Funktionen multiplizieren.
3. Man kann Tensorfelder verjüngen. Ist A ein Tensor vom Typ (p,q), so ist $V_i^j(A)$ ein Tensor vom Typ $(p-1, q-1)$. Hierbei ist $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. Wir haben erklärt, daß die Verjüngung auf der kanonischen Abbildung $V \otimes V^* \to \mathbb{R}$ beruht. Man rechnet nach, daß dies für die Komponeten einfach das folgende bedeutet: Man setze einen oberen und einen unteren Index gleich un summiere. Beispielsweise ist Die Verjüngung bezüglich der ersten ko- und kontravarianten Komponenten gegeben durch

$$A^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \longmapsto \sum_{i_1} A^{i_1,i_2,\ldots,i_p}_{i_1,j_2,\ldots,j_q}.$$

Wir nehmen an, daß auf jedem Tangentialraum T_aX eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform gegeben ist. Wenn man will, kann man dies als ein zweifach kovariantes Tensorfeld ansehen. Die Bilinearform induziert einen Isomorphie $T_aX \to T_a^*X$. Danke dieser Isomorphie kann man Tensorfelder vom Typ (p,q) in solche vom Typ $(p+q,0)$ „umschreiben". Es gilt also

4. Ist auf jedem Tangentialraum eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform gegeben, so gibt es eine natürliche umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen Tensoren vom Typ (p,q) und (p',q') sofern $p+q=p'+q$.

Für die Komponenten bedeutet dies, daß man Indizes von unten nach oben shiften kann und umgekehrt. Die Formel für dieses Shiften ist leicht zu ermitteln. Man rechnet im einfachsten Fall $p=1$, $q=0$ beispielsweise nach, daß die Formel durch

$$\sum A^i e_i \longmapsto \sum B_i e_i^*, \quad B_i = \sum_{ij} g_{ij} A^j,$$

gegeben ist. Dabei sei $g_{ij} = (e_i, e_j)$ gegeben ist.

Übrigens sind die g_{ij} gerade die Komponenten des zweifach kovarianten Tensors, welcher durch die Bilinearform gegeben ist. Shifted man beide Indizes nach oben, so erhält man einen zweifach kontravarianten Tensor g^{ij}. Man rechnet nach, daß dies Matrix invers zur Matrix (g_{ij}) ist. Die früher verwendete Bezeichnung für die inverse einer symmetrischen invertierbaren Matrix ist also konsistent mit dem Tensorkalkül.

Eine alternative Definition für Tensorfelder

Diese beruht auf der Interpretation

$$T^{p,q}(T_xX) = \mathrm{Mult}(\overbrace{(T_xX)^* \times \cdots \times (T_xX)^*}^{p} \times \overbrace{T_xX \times \cdots \times T_xX}^{q}, \mathbb{R}).$$

Sei T ein (p,q)-Tensorfeld auf X. Sind $A_1,\dots,A_q$ Vektofelder und $\omega_1,\dots,\omega_p$ Kovektorfelder auf einem offenen Teil $U \subset X$, so kann man die Funktion

$$f(x) = T((\omega_1)_x, \dots, (\omega_p)_x, (A_1)_x, \dots (A_q)_x)$$

auf U definieren. Wir bezeichnen diese sinngemäß mit

$$f = T(\omega_1, \dots, \omega_p, A_1, \dots, A_q) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn das Tensorfeld T und alle A_i, ω_j differenzierbar sind, so ist diese Funktion differenzierbar.

8.1 Bemerkung. *Differenzierbare Tensorfelder vom Typ (p,q) entsprechen umkehrbar eindeutig Vorschriften T, welche jeder offenen Menge $U \subset X$ und jedem Tupel $A_1,\dots,A_q$ von differenzierbaren Vektofeldern und $\omega_1,\dots,\omega_p$ und fifferenzierbaren Kovektorfeldern eine differenzierbare Funktion* nDT

$$T(\omega_1, \dots, \omega_p, A_1, \dots, A_q) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

zuordnen, wobei diese Vorschrift mit Restriktion auf kleinere offene Mengen verträglich sein soll und außerdem multilinear über dem Ring $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Multilinear über dem dem Ring $\mathcal{C}^\infty(U)$ soll natürlich u.a. bedeuten,daß neben der Additivität in jeder Variablen auch

$$T(f_1\omega_1,\ldots,f_p\omega_p,g_1A_1,\ldots,g_qA_q) = f_1\cdots f_p\,g_1\cdots g_q\,T(\omega_1,\ldots,\omega_p,A_1,\ldots,A_q)$$

gilt.

Kapitel IV. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

1. Der Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit

1.1 Definition. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine pseudoriemannsche Metrik ist eine Vorschrift, welche jedem $a \in X$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform* DRm

$$g_a : T_aX \times T_aX \longrightarrow \mathbb{E}$$

zuordnet, welche von a differenzierbar abhängt. Ist sie für alle a positive definit, so heißt sie eine Riemannsche Metrik.

Eine pseudoriemannsche Metrik kann auch als zweifach kontravarianter Tensor angesehen werden. Ist $X = D$ ein offener Teil eines $\mathbb{R}^n$, so ist $T_aX = \mathbb{R}^n$ und die Metrik ist durch ihre Grammatrix $g_{ik}(x)$ gegeben. In diesem Falle ist (D, g) also einfach ein Riemannsches Gebiet. Allgemein ist eine pseudoriemannsche Metrik durch ihre Komponenten gegeben. Ist φ eine Karte auf X, so definieren die Komponenten eine Struktur als Riemannsches Gebiet (V_φ, g_φ) Bei Kartenwechsel $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$ gilt eine Umsetzungsformel von g_φ nach g_ψ. Dies ist die gleiche Umestzungsformel, wie wir bei Riemannschen Gebieten gefunden hatten und in den Begriff der Isometrie Riemannscher Gebiete gefaßt hatten. Man erhält:

1.2 Bemerkung. *Ist (X, g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, so wird jedes Kartenblatt V_φ zu einem pseudoriemannschen Gebiet (V_φ, g_φ). Die Kartenwchselabbildungen* RgK

$$\gamma = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

sind Isometrien pseudoriemannscher Gebiete. Ist umgekehrt für jedes Kartenblatt (aus einem Atlas genügt) eine pseudoriemannsche Metrik gegegen, so daß diese Verträglichkeitseigenschaften erfüllt sind, so kommen diese von einer pseudoriemannschen Metrik g auf X.

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung und g eine Riemannsche Metrik auf Y. Man kann dann auf jedem T_aX eine Bilinearform durch Zusammensetzung mit der Tangentialabbildung definieren. Im allgemeinen wird diese ausgeartet sein, also keine pseudoriemannsche Metrik definieren. Fälle in denen die Paarung nicht ausgeartet wird, sind:

1. f ist ein lokaler Diffeomorphismus.
2. g ist eine Riemannsche Metrik und f eine lokale Immersion.

Insbesondere kann man Riemannsche Metriken auf Untermannigfaltigkeiten einschränken.

Einige Begriffe übertragen sich sofort von pseudoriemannschen Gebieten auf pseudoriemansche Mannigfaltigkeiten. Dazu gehören

1. Der Begriff der Isometrie $(X, g) \to (Y, h)$. Eine Isometrie ist ein Diffemomorphimus $f : X \to Y$, so daß für jedes $x \in X$ der induzierte Isomorphismus $T_x f : T_x X \to T_{f(x)}$ mit den ausgezichneten Bilinearformen verträglich ist,
$$g_x(A, B) = h_{f(x)}((T_x f)(A), (T_x f)(B)).$$
2. Der Begriff der Geodätischen
$$u : I \longrightarrow (X, g).$$

Der Existenzsatz fur Geodätische überträgt sich unmittelabar auf pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten:

Es gibt zu jedem Punkt a und jedem Tangentialvektor $A \in T_a X$ eine Geodätische $u : I \to \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und $\dot{u}(0) = A$. Unter diesen Geodätischen gibt es eine mit größten I und diese ist eindeutig bestimmt.

Man hat wieder „differenzierbare Abhängigkeit von den Parametern a, A. Zu ihrer Formulierung benutzt man zweckmäßigerweise die Konstruktion des Tangentialbündels III.4.3.

Ist $U \subset TX$ eine offene relativ kompakte Teilmenge, so kann man I für alle $(a, A) \in U$ gemeinsam wählen. Die Abbildung
$$I \times U \longrightarrow X, \quad (t, a, A) \longmapsto u_{a,A}(t)$$
ist differenzierbar.

Auch diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus der lokalen Theorie. Wir verzichten darauf, dies näher auszuführen.

2. Kovariante Ableitung

Sei X eien differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir erinnern daran, daß man einem differenzierbaren Vektorfelder A einen Operator $A : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ (U offen) zuordnen kann. Man nennt
$$\nabla_A f := Af$$

auch die kovariante Ableitung von f längs des Vektorfelds A. Man kann möchter allgemeiner Tensoren längs Vektorfeldern ableiten, also Abbildungen

$$\nabla_A : \mathcal{T}^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{p,q}(U)$$

definieren. Im Falle $p = q = 0$ soll natürlich der eben behandelte Fall $\nabla_A f = Af$ herauskommen. Wir behandeln den nächst wichtigen Fall der Vektorfelder

$$\nabla_A : \mathcal{T}^{1,0}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{1,0}(U).$$

Man will also $\nabla_A B$ defnieren, wobei A und B differenzierbare Vektorfelder sind und das Resultat soll ebenfalls ein differenzierbares Vektorfeld sein.

Ein naheliegender Gedanke wäre die Definition über die Komponenten. Man betrachtet eine differenzierbare Karte $\varphi : U_\phi \to V_\phi$. Die Felder A, B entsprechen in V_ϕ

$$\sum A^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \sum B^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Man könnte daran denken, $C = \nabla_A B$ so zu definieren, daß

$$C^i(x) = \sum_\nu A^\nu(x) \frac{\partial B^i(x)}{\partial x_\nu}$$

die Komponenten von C sind. Man wendet also einfach den Operator A komponentenweise an.

Leider haben die Funktionen $C_i(x)$ nicht das Transformationsverhalten, wie es die Komponenten eines Vektorfeldes haben müßten. Das Vektorfeld C existiert also gar nicht. Es geht nun darum, die Formeln für $C_i(x)$ so zu modifizieren, daß man doch das richtige Transformationsverhalten bekommt. Um diese Formeln zu finden, stellen wir gewisse Bedingingen, die man unbedingt haben will:

2.1 Definition. *Eine **kovariante Ableitung** oder ein **Zusammenhang*** DZu
auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Schar von Abbildungen

$$\mathcal{T}^{1,0}(U) \times \mathcal{T}^{1,0}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{1,0}(U), \qquad (A, B) \longmapsto \nabla_A(B),$$

welche mit Restriktion auf kleinere offenen Mengen verträglich ist und so, daß

$$\begin{aligned} \nabla_{fA+gB} &= f\nabla_A + g\nabla_B \\ \nabla_A(fB) &= f\nabla_A(B) + \nabla_A(f)B \end{aligned}$$

gilt $(f, g \in \mathcal{C}^\infty(U))$.

Es ist klar, daß man Zusammenhänge auf offene Untermannigfaltigkeiten einschränken kann. Ist ein Diffeomorphismus $f : X \to Y$ gegeben, so kann man einen Zusammenhang von X auf Y übertragen und umgekehrt. Wir nehmen einmal an, ein Zusammenhang sei gegeben. Wir versuchen, ihn in Komponenten auszudrücken. Wir betrachten also eine differenzierbare Karte $\varphi : U_\varphi \to V_\phi$. Wir wollen die Formel $C = \nabla_A(B)$ in Komponenten zu formulieren und übertragen den Zusammenhang auf V_φ (nachdem man ihn auf U_φ eingeschränkt hat. Wir führen dann die Funktionen Γ_{ij}^k durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \, \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ein. Mittels der Grundeigenschaften eines Zusammenhangs erhält man

$$\nabla_{\sum A_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum B_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum C_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

mit

$$C_k = \sum_i A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k A_i B_j .$$

Der Zusammenhang ist durch die Kenntnis aller Funktionen Γ_{ij}^k bestimmt. Wir schreiben manchmal $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ um anzudeuten, daß diese Funktionen von der Karte φ abhängen. Wir müssen die Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ beschaffen sein, damit sie einen Zusammenhang definieren. Die Bedingung ist offenbar, daß die Komponenten C_i die Komponentne eines Vektorfelds sind, also sich entsprechend transformieren.

2.2 Hilfssatz. *Jeder differenzierbaren Karte φ (aus einem Atlas genügt) sei ein System von differenzierbaren Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ auf V_φ zugeordnet. Diese gehören genau dann zu einem (eindeutig bestimmten) Zusammenhang, falls sie beim Übergang zu einer anderen Karte ψ der Umsetzungsformel* ZCs

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_k(x)}{\partial x_j} \, \Gamma_{\varphi;\mu\nu}^j(x) = \frac{\partial^2 \gamma_k(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_j(x)}{\partial x_\nu} \, \Gamma_{\psi;ij}^k(y) \quad (y = \gamma(x))$$

(mit $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$) genügen.

Vorsicht: Dies ist nicht das Transformationsverhalten eines Tensors.

Genau dieses Transformationsverhalten hatten die Christoffelsymbole, welche wir eingeführt haben, um Geodätische zu beschreiben. Somit erhalten wir:

2.3 Satz. *Auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit (X,g) existiert ein Zusammenhang ∇, so daß die Funktionen $\Gamma^k_{\varphi;ij}(x)$ bezügliche einer Karte φ genau die Christoffelsymbole von $(g_{\varphi;ij})$ sind.* ELz

Man nennt diesen Zusammenhang den **Levi-Civita-Zusammenhang**.

Wir wollen eine koordinateninvariante Deutung dieses Zusammenhangs geben. Dazu ist es sinnvoll, einen Zusammenhang ∇ auszudehnen und auch die Ableitung $\nabla_A T$ von Tensoren T zu definieren.

2.4 Hilfssatz. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf X. Man man kann dann für jedes offene $U \subset X$ und jedes Vektorfeld A auf U und jedes (p,q) eine Abbildung* AaT

$$\nabla_A : \mathcal{T}^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{p,q}(U)$$

mit folgenden Eigenschaften definieren:

1. *Im Falle $p = q = 0$ ist $\nabla_A(f) = A(f)$.*
2. *Im Falle $p = 1$, $q = 0$ stimmt ∇_A mit dem gegebenen Zusammenhang überein.*
3. *Die Abbildung ∇_A ist verträglich mit Einschränkung auf kleinere offene Mengen.*
4. *Die Abbildung ∇_A ist $\mathbb{R}$-linear.*
5. *Diese Abbildung genügt der Produktregel*

$$\nabla_A(T \otimes S) = T \otimes \nabla_A(S) + \nabla_A(T) \otimes S.$$

5. *Diese Abbildungen sind verträglich mit Verjüngung,*

$$C^i_j(\nabla_A(B)) = \nabla_A(C^i_j(B)) \quad (1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q).$$

Diese Ausdehnung des Zusammenhangs auf Tensoren ist eindeutig.

Beweis. Da man jeden Tensor wenigstens lokal als endliche Summe von Tensoren der Form $A_1 \otimes A_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q$ schreiben kann, kommt es darauf an, wie der Zusammenhang auf Kovektorfelder (Differentiale) wirkt. Wir zeigen, daß folgende Formel zwingend ist:

2.5 Hilfssatz. *Die kovariante Ableitung $\nabla_A(\omega)$ eines Differentials ω ist durch* KoD

$$(\nabla_A(\omega))(B) = A(\omega(B)) - \omega(\nabla_A(B))$$

charakterisiert.

Beweis. Zum Beweis betrachten wir den Tensor $B \otimes \omega$. Seine Verjüngung (C^1_1) ist die Funktion $\omega(B)$. Da kovariante Ableitung mit Verjüngung verträglich sein soll, muß $A(\omega(B))$ durch Verjüngung aus $\nabla_A(B \otimes \omega)$ entstehen.Nach der Produktformel ist dies zunächst $\nabla_A(B) \otimes \omega + A \otimes \nabla_B(\omega)$. Verjüngung ergibt $\omega(\nabla_A(B)) + \omega(\nabla_A(B))$ und damit die Behauptung. □

Der Beweis von 2.4 ist nun leicht zu erbringen. □

Als eine Übungsaufgabe berechnen wir die kovariante Ableitung eines Tensors $T \in \mathcal{T}^{(0,2)}$. Wenigstens lokal kann man T in der Form $T = \omega_1 \otimes \omega_2$ schreiben. Mittels der Produktformel und 2.5 beweist man nun für solche T und danach allgemein:

2.6 Hilfssatz. *Die kovariante Abeleitung $\nabla_A(T)$ eines Tensors vom Typ* CkZ
$(0,2)$ *ist durch*

$$(\nabla_A(T))(X,Y) = AT(X,Y) - T(\nabla_A(X),Y) - T(X,\nabla_A(Y))$$

charakterisiert.

Ein zweiter Beweis ergibt sich so: Man wende die Produktformel auf $X \otimes Y \otimes T$ an und verjünge zweimal.

2.7 Satz. *Auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit existiert ein und* CLZ
nur ein Zusammenhang ∇ mit den beiden Eigenschaften

$$\nabla_A(B) - \nabla_B(A) = [A,B]$$
$$\nabla_A g = 0.$$

Dieser Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.

Beweis. Aus $\nabla_A g =$ folgt wegen 2.6

$$A(g(X,Y)) = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y)$$

und in Verbindung mit der ersten Bedingung

$$A(g(X,Y)) = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y) + g([A,X],Y).$$

man vertauscht in dieser Formel X, Y, A zyklisch und eliminiert aus diesen drei Gleichungen ∇_X und ∇_Y. Das Resulatat ist

$$g(X, \nabla_A Y) =$$
$$Ag(X,Y) + g(A,[X,Y]) + Yg(X,A) + g(Y,[X,A]) - Xg(Y,A) - g(X,[Y,A]).$$

Es sollte klar sein, wie man $\nabla_A Y$ hier hier herausholen kann. Man erinnere sich an die Identifikation $V \cong V^*$ bei Vorhandensein einer nicht ausgearteten Bilineraform. Es ist leicht zu verifizieren, daß das durch diese Formel definierte $\nabla_A(Y)$ die geforderten Eigenschaften hat.

Wir übergehen den Nachweis, daß es sich um den Levi-Civita-Zusammenhang handelt. □

3. Der Riemannsche Krümmungstensor

Man rechnet ohne Mühe nach:

3.1 Hilfssatz. *Ist ∇ ein Zusammenhang, so ist* DRt

$$R(A,B,C,\omega)=\omega(\nabla_A(\nabla_B(C)))-\omega(\nabla_B(\nabla_A(C)))-\omega(\nabla_{[A,B]}(C))$$

ein Tensor vom Typ $(1,3)$.

Zum Beweis muß man lediglich die Formel

$$R(f_1A,f_2B,f_3C,f_4\omega)=f_1f_2f_3f_4R(A,B,C,\omega)$$

verifizieren. □

Man nennt diesen Tensor den dem Zusammenhang zugeordneten Krümmungstensor.

3.2 Satz. *Sei (X,g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Der dem Levi-Civita-Zusammenhang zugeordnete Krümmungstensor stimmt mit dem Riemannschen Krümmungstensor überein.* CRt

Auch dies kann man direkt nachrechnen. □

Dank der pseudoriemannschen Metrik kann man R auch einen Tensor vom Typ $(0,4)$ zuordnen: Diese Variante des Riemannschen Krümmungstensors nennt man auch Riemmannschen Krümmungstensor und bezeichnet sie ebenfalls mi R. Sie ist definiert durch

$$R(A,B,C,D)=g(\nabla_A\nabla_B(C),D)-g(\nabla_B\nabla_A(C),D)-g(D,\nabla_{[A,B]}(C)).$$

Man rechnet leicht folgende Eigenschaften von R nach.

3.3 Hilfssatz. *Es gilt* BiD

$$R(A,B,C,D)=-R(B,A,C,D)=-R(A,B,D,C)=R(C,D,A,B),$$
$$R(A,B,C,D)+R(B,C,A,D)+R(C,A,B,D)=0\quad \textit{\textbf{(Bianchi-Identität)}}.$$

Schließlich kann man man auf R (in der ursprünlichen Form) den Verjüngungsoperator C_1^1 anwenden und einen Tensor vom Typ $(0,2)$. Dies nennt man den **Riccitensor**. Man bezeichnet ihn häufig mit R_0. So wie wir ihn eingeführt haben ist er vom Typ $(0,2)$. Man kann natürlich auch andere Verjüngungen bilden. Im Grunde kann man je zwei Komponenten von $R(A,B,C,D)$ betrachten, eine davon hochheben und dann verjüngen. Das ergibt 6 mögliche Verjüngungen. Man kann zeigen, daß diese Verjüngung entweder 0 ergibt, zum Beispiel wenn man A,B herausgreift oder den Ricci-Tensor oder das Negative des Ricci-Tensors. Der Ricci-Tensor ist also bis aufs Vorzeichen die einzig mögliche Verjüngung des Riemannsche Krümmungstensors.

Man kann zeigen, daß der Ricci-Tensor symmetrisch ist,

$$R_0(A,B)=R_0(B,A).$$

Der Ricci-Tensor hat auch eine Variante vom Typ $(1,1)$. Man ersetzt entweder A oder B durch das korrespondierende Differential. Es kommt beidesmal dasselbe heraus. Dies kann man wieder verjüngen. Das Resultat ist eine Funktion auf X, die sogenannte **skalare Krümmung**.

3.4 Satz. *Die Gaußsche Krümmung eines Flächenstücks im Raum ist genau die halbe skalare Krümmung.* GiS

Dies zeigt nocheinmal die isometrische Invarianz der Guaßschen Krümmung (Theorema Egregium)!

Geometrische Deutung des Riemannschen Krümmungstensors

Sei jetzt (X, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die Bilinearform g_a also auf jedem Tangentialraum T_aX positiv definit. Sei $W \subset T_aX$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Der Riemannsche Krümmungstensor definiert eine Multilinearform auf $T_aX \times \cdots \times T_aX$. Diese kann man auf $W \times \cdots \times W$ einschränken. Außerdem kann man die Bilinearform g_a auf $T_aX \times T_aX$ einschränken. Entscheidend ist nun, daß diese Einschränkung nicht ausgeartet ist (da g_a) positiv ist. Wir können daher W mit W^* identifizieren und erhält eine Multilinearform auf $W \times W \times W \times W^*$ also einen Tensor aus $T^{1,3}(W)$. Diesen Tensor kann man verjüngen, so wie man den Riccitensor durch Verjüngen defniert hat. Man erhält dann eine (symmetrische) Bilineraform auf $W \times W$ also einen Tensor aus $W^* \otimes W^*$. Man kann wieder eines der beiden W^* durch W ersetzen (welches ist gleichgültig) und kann nochmals verjüngen. Das Resultat ist ein Skalar. Diesen nennt man die Schnittkrümmung von (X, a) im Punkt a bezüglich W.

3.5 Definition. *Sei (X, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $a \in X$ eine Punkt und $W \subset T_aX$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Schränkt man den Riemannschen Krümmungstensor R_a auf W ein, so erhält man nach zweimaliger Verjüngung (analog zur Bildung der skalaren Krümmung) einen Skalar, die sogenannte* ***Schnittkrümmung*** DSk

$$K_{a,W}(X, g).$$

Diese Schnittkrümmungen sind sehr viel anschaulicher als der Riemannsche Krümmungstensor. Sie enthalten aber noch die volle Information des Riemannschen Krümmungsrensors. Beispielsweise gilt (ohne Beweis):

Der Riemannsche Krümmungstensor R_a verschwindet genau dann in a, wenn alle Schnittkrümmungen für beliebige $W \subset T_aX$ verschwinden.

Ein weiterer Satz (ohne Beweis) unterstricht die Richtigkeit des Konzeptes des Krümmungstensors:

Der Riemannsche Krümmungstensor ist genau dann identisch Null, wenn (X, g) lokal flach ist, wenn also jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, welche zu einem offenen Teil des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Einheitsmatrix als Metrik, isometrisch äquivalent ist.

Ziemlich tief ist folgender Sphärensatz (ohne Beweis):

Sei $X = (X, g)$ eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Schnittkrümmung sei konstant in dem Sinne, daß sie in jedem Punkt $a \in X$ und für jeden zweidimensionalen Untervektorraum $W \subset T_a X$ denselben Wert hat. Dieser Wert sei positiv. Dann ist X isometrisch äquivalent zu einem offenen Teil einer Sphäre

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2 \right\} \quad (r > 0),$$

welche natürlich mit der Riemannschen Metrik versehen wurde, welche man durch Einschränken der Euklidschen Metrik des $\mathbb{R}^n$ erhält.

Diese Resultate zeigen, daß die Schnittkrümmung (damit letztlich der Riemannsche Krümmungstensor) vollständig die „innere Krümmung“ beschreibt. Irgendwie ist die innere Krümmung somit ein Phänomen, welches zum Erstenmal im Zweidimensionalen auftaucht und dort auch in gewissem Sinne endet.

Abschließend formulieren wir noch die Einsteinschen Feldgleichungen: Die Raumzeit wird beschrieben durch pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit (X, g) der Dimension 4. Die Signatur der Bilinearform g_a ist in jedem Punkt $1, 3)$. Es gilt

$$R_{\text{Ricc}} + \frac{1}{2} R_{\text{skalar}} g + \lambda g = T.$$

Dabei ist T der sogenannte Energue-Moment-Tensor. Re beschreibt die Masse- und Energieverteilung. In Vakuumregionen des Weltalls ist $T = 0$. Dabe ist λ die sogenannte kosmologische Konstante, eine Konstante, die von Einstein erst später eingeführt wurde, von ihm wieder verworfen wurde und heutzutage wieder eingeführt wurde. (mit einem um den Faktor 10^{140} anderen Wert, als Einstein vorgeschlagen hatte. Dies wäre die schlechteste numerische Vorhersage, die in der Physik je gemacht wurde.

4. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrischer Raum

Bekanntlich ist im $\mathbb{R}^n$ —aufgefaßt als Riemannsches Gebiet mit der Riemannschen Metrik $g(x) = E$ (Einheitsmatrix)— die Verbindungsstrecke $u(t) = a + t(b - a)$ $(0 \leq t \leq 1)$ die kürzeste Verbindung zweier Punkte a, b. Wir begründen dies kurz. Die Länge der Verbindungsstrecke ist offenbar die Euklidische Norm $\|b - a\|$. Für jede andere Verbindungskurve u (parametrisiert durch das Einheitsintervall) gilt

$$l(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\| \, dt \geq \left\| \int_0^1 \dot{u}(t) \, dt \right\| = \|a - b\|.$$

Die hierbei auftretende Ungleichung folgt aus der anologen für endliche Summen durch Grenzübergang.

Wir setzen im folgenden immer voraus, daß $X = (X, g)$ eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Dann kann man je zwei Punkte a, b durch eine stückweise glatte Kurve

$$u : [0,1] \longrightarrow X, \quad u(0) = a,\ u(1) = b$$

verbinden. Man kann all diese Verbindungskurven und das Infimum ihrer Längen betrachten

$$d_X(a,b) := \inf_u l_g(u).$$

Man kann zeigen, daß es genügt, sich auf glatte Kurven zu beschränken. Wir beweisen dies nicht, fassen uns jedoch immer bei Fragen der stückweisen Glattheit kurz.

4.1 Satz. *Die Funktion* MRm

$$d_X(a,b) := \inf_u l_g(u)$$

ist eine Metrik auf X. Die zugehörige Toplogie stimmt mit der gegebenen Toplogie auf X überein.

Beweis. Von den Axiomen einer Metrik sind die Reflexivität, Symmetry und die Dreiecksungleichung klar. Nicht klar ist vorerst die Definitheit ($d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$) und die Gleichheit der Toplogien. Diese gilt es nun zu beweisen:

Sei $a \in X$ ein Punkt und φ ein differenzierbare Karte mit $a \in U_\varphi$ und $\varphi(a) = 0$. Wir betrachten auf V_φ zwei verschiedene Metriken:

1. Die von d_X auf X übertragene Metrik. Diese bezeichen wir mit d, also

$$d(x,y) = d_X(a,b) \quad \text{mit} \quad x = \varphi(a),\ y = \varphi(b).$$

2. Die Euklidische Metrik

$$d'(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}.$$

Im folgenden sei $r > 0$ immer so klein, daß die Euklidische Kugel $\|x\| \le r$ ganz in V_φ enthalten ist.

Behauptung. *Ist $r > 0$ genügend klein, so sind die Metriken d und d' auf der Kugel $\|x\| < r$ äquivalent. Es existiert als ein $C > 0$ mit*

$$d(x,y) \le C d'(x,y), \quad d'(x,y) \le C d(x,y) \quad \textit{für} \quad \|x\|, \|y\| < r.$$

Es ist klar, daß Satz 4.1 aus dieser Behauptung folgt. Zu ihrem Beweis betrachten wir die Funktion

$$\{A;\ \|A\| = 1\} \times \{x;\ \|x\| \le r\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A,x) \longmapsto g(x)[A].$$

Als stetige Funktion auf einem Kompaktum besitzt sie Minimum und Maximum und beide sind positiv. Wählt man die Konstante C genügend groß, so folgt für alle x mit $\|x\| \le r$ die Ungleichung

$$C^{-1}\|A\|^2 \le g(x)[A] \le C\|A\|^2$$

zunächst unter der Nebenbedingung $\|A\| = 1$ und dann aus Homogenitätsgründen für alle A.

Die Behauptung wäre nun klar, wenn man bei der Definition von d_X nur Kurven zuließe, welche ganz in dem Teil $U \subset X$ verlaufen, der dem Kartenbereich $\|x\| < r$ entspricht. Es könnte aber zu jeder Verbindungskurve zweier Punkte a, b u, welche in U verläuft, eine kürzere Verbindungskurve existieren, welche U zeitweilig verläßt. Wir zeigen nun, daß dies nicht eintreten kann, wenn man r geeignet verkleinert. Wir wollen also r durch ein geeignetes ε mit $0 < \varepsilon < r$ ersetzen. Wenn eine Kurve in der ϵ-Kugel startet und nicht ganz in U verläuft, so ist ihre Länge mindestens $C^{-1}(r-\varepsilon)$. (Es gibt ein kleinstes t_0, so daß $u([0,t_0])$ ganz im Abschluß von U enthalten ist.) Andererseits können zwei Punkte aus der ϵ-Kugel innerhalb dieser durch eine Kurve (sogar ein Strecke) der Länge $\le 2C\varepsilon$ verbinden lasse. Wählt man ε genügend klein, so ist dies kleiner als $C^{-1}(r-\varepsilon)$. □

5. Die Exponentialfunktion

Wir setzen wieder voraus, daß (X, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Sei $a \in X$ ein fest gewählter Punkt. Wir betrachen zu beliebigem $A \in T_aX$ die Geodätische $u_{a,A}(t)$ mit Anfangspunkt a und Anfangsrichtung A. Sie ist auf einem gewissen Intervall $(-r, r)$ definiert. Schränkt man sich auf alle A aus einem Kompaktum ein, so kann man r für all diese A gemeinsam wählen. Da mit $u(t)$ auch $u(t_0t)$ geodätisch ist, gilt:

5.1 Bemerkung. *Sei Die Geodätische $u_{a,A}(t)$ sei auf dem Intervall $(-r, r)$ definiert. Es gilt* RTg

$$u_{a,sA}(t) = u_{a,A}(st) \qquad (|t| < r, |s| \le 1).$$

Hieraus ergibt sich auch:

5.2 Bemerkung. *Sei $a \in X$. Es existiert eine offene Umgebung* GEf

$$0 \in U \subset T_aX,$$

so daß die Geodätische $u_{a,A}$ für alle $A \in U$ auf dem Intervall $(-2, 2)$ definiert ist. Insbesondere ist dann die Abbildung

$$\exp_a : U \longrightarrow X, \quad \exp_a(A) := u_{a,A}(1),$$

wohldefiniert.

Die Exponentialabbildung ist natürlich differenzierbar. Wir können insbesondere ihre Tangentialabbildung im Nullpunkt betrachten. Dies ist eine lineare Abbildung

$$T_0U = T_aX \longrightarrow T_aX.$$

5.3 Hilfssatz. *Die Tangentialabbildung $J(0, \exp_a)$ der Exponentialabbildung im Nullpunkt ist die Identität.* TiI

Folgerung. *Es existiert eine offene Umgebung von 0 im Tangentialraum T_aX, welche durch die Exponentialfunktion diffeomorph auf eine offene Umgebung von $a \in X$ abgebildet wird.*

Beweis. Ist $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ein n-Tupel differenzierbarer Funktionen, welche in einer offenen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert sind, so gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f_i(ta)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) a_j.$$

Die Funktionmatrix im Nullpunkt ist demnach genau dann die Einheitsmatrix, wenn

$$\frac{d}{dt} f(ta)\Big|_{t=0} = a$$

gilt. Zum Beweis von 5.3 ist also

$$\frac{d}{dt} \exp_a(tA)\Big|_{t=0} = A$$

zu zeigen. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung 5.2

$$\exp_a(tA) = u_{a,A}(t).$$

Die Kurven $\exp_a(tA)$ sind also insbesondere genau die Gedotätischen zu den Anfangswerten (a, A).

Wir wollen die Exponentialappbildung $\exp_a$ auch zu variablem Mittelpunkt betrachten. Zunächst einmal sollte klar sein, daß es zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $U \subset TX$ von $(a, 0)$ gibt, so daß

$$U \longrightarrow X, \qquad (a, A) \longrightarrow \exp_a(A)$$

wohldefiniert ist. Wir betrachten allgemeiner

$$U \longrightarrow X \times X, \quad (b, A) \longmapsto (b, \exp_a(A)).$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die Jacobiabbildung dieser Abbildung in $(a, 0)$ invertierbar ist. Zum Beweis kann man annehmen, daß $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Riemannsches Gebiet ist. Dann ist $TX = X \times \mathbb{R}^n$ und die Funkrtionalmatrix ist offenbar von der Form

$$\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad E \text{ Einheitsmatrix.}$$

Damit folgt:

5.4 Hilfssatz. *Zu jedem Punkt $a \in X$ existiert eine offenen Umgebung $(a, 0) \in TX$, so daß die Abbildung* lgN

$$U \longrightarrow X \times X, \quad (b, A) \longmapsto (b, \exp_b(A))$$

einen Diffeomorphismus von U auf eine offene Umgebung von (a, a) bewirkt.

6. Normalkoordinaten

Nach 5.3 definiert die Exponentialfunktion einen Diffeomorphismus kleiner offener Umgebungen

$$\exp_a : U \longrightarrow V, \qquad 0 \in U \in T_aX, \quad a \in V \subset X.$$

Die Umkehrung von $\exp_a$ ist also eine differenzierbare Karte. Das Kartenblatt U trägt somit eine Struktur als Riemannsches Gebiet. Damit können wir beweisen.

6.1 Satz. *Zu jedem Punkt $a \in X$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert eine offene Ungebung, welche isometrisch zu einem Riemannschen Gebiet (D, g) mit folgenden Eigenschaften ist:* GNf

1. *D ist eine Euklidische Kugel $\|x\| < R$ mit $R > 1$.*
2. *Die Matrix $g(0)$ ist die Einheitsmatrix.*
3. *Die Geraden $u(t) = tA$ sind geodätisch.*

Wichtig hierbei ist nur die Eigenschaft 3), welche man mit der Karte „Exponentialfunktion" erreicht. Die Eigenschaft 2) kann man durch eine Transformation $g(x) \longmapsto A'g(x)A$ mit konstantem A erreichen (ohne 3) zu verlieren) und 1) erreicht man durch Reskalierung. □

Riemannsche Gebiete mit den Eigenschaften 1)-3) sind sehr spezieller Natur. Wir formulieren zwei Eigenschaften:

6.2 Hilfssatz. *Sei (D, g) ein Riemannsches Gebiet wie in 6.1 . Die Funktion* EeG

$$t \longmapsto g(tA)[A] \qquad (\|tA\| < R)$$

ist für jedes $A \in \mathbb{R}^n$ konstant $\|A\|^2$.

Folgerung. *Die Länge $l_g(u)$ der Geodätischen $u(t) = \exp(tA)$, $0 \le t \le 1$ ($\|A\| < R$), ist gleich der Euklidischen Norm $\|A\|$.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Konstanz der Geschwindigkeit der Geodätischen tA. □

Wir nennen zwei Zeilen-Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ senkrecht bezüglich einer symmetrischen $n \times n$-Matrix S, falls

$$aSb' = \sum_{1 \le i,j \le n} s_{ij} a_i b_j = 0$$

gilt.

6.3 Hilfssatz. *Sei (D,g) ein Riemannsches Gebiet wie in 6.1 . Seien $A,B\in\mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, welche bezüglich $g(0)$ senkrecht stehen. (Da $g(0)$ die Einheitsmatrix ist, bedeutet dies, daß A,B im üblichen Euklidischen Sinne senkrecht stehen.) Dann stehen sie auch senkrecht bezüglich allen $g(a)$ mit $a\in D\cap\mathbb{R}A$.* EzG

Beweis. Es ist klar, daß man diesen Hilfssatz nur in der Dimension zwei beweisen muß und außerdem annehmen kann, daß A,B die beiden Einheitsvektoren sind.

Wir haben also im Falle $n=2$ zu zeigen, daß $g(t,0)$ für alle t mit $|t|<R$ eine Diagonalmatrix ist.

Zum Beweis ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten einzuführen. Die Abbildung

$$(r,\varphi)\longmapsto(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\quad 0<r<R,$$

ist ein lokaler Diffemomorphismus. Wir bettrachten die zurückgezogene Riemannsche Metrik

$$\tilde g(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} g(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Wir werden sogar zeigen, daß $\tilde g(a)$ für alle a eine Diagonalmatrix ist.

Dann ist $g(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ wenigstens dann eine Diagonalmatrix, wenn $\sin\varphi=0$ ist. Die Kurven $u(t):=(tr,\varphi)$ sind für festes (r,φ) geodätisch bezüglich $\tilde g$. Aus der Differentialgleichung für Geodätische folgt

$$\tilde\Gamma^1_{11}=\tilde\Gamma^2_{11}=0$$

also mittes der expliziten Gestalt der Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}\tilde g^{11}\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial r}+\tilde g^{12}\Big(2\frac{\partial\tilde g_{12}}{\partial r}-\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial\varphi}\Big)&=0\\ \tilde g^{21}\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial r}+\tilde g^{22}\Big(2\frac{\partial\tilde g_{12}}{\partial r}-\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial\varphi}\Big)&=0\end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial r}=0,\quad 2\frac{\partial\tilde g_{12}}{\partial r}=\frac{\partial\tilde g_{11}}{\partial\varphi}.$$

Folgedessen gilt

$$\tilde g_{11}(r,\varphi)=h(\varphi)\quad\text{und}\quad\partial\tilde g_{12}=\frac{1}{2}h'(\varphi)+l(\varphi)$$

mit gewissen Funktionen einer Veränderlicher h,l.

Andererseits folgt aus der $\tilde{g}$ definierenden Gleichung

$$\lim_{r\to 0} g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $h(\varphi) = 1$ und $l(\varphi) = 0$.

7. Geodätisch konvexe Umgebungen

Ziek dieses Abschnitts ist der Beweis von

7.1 Theorem. *Jeder Punkt $a \in X$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt beliebig kleine offene Umgebungen W mit folgender Eigenschaft: Zu je zwei Punkten a, b existiert genau eine Geodätische $u(t)$, $0 \le t \le 1$, welche innerhalb U verläuft und welche a mit b verbindet, $u(0) = a$. $u(1) = b$. Ist v irgendeine stückweise glatte Kurve in X, welche a mit b verbindet, so gilt $l_g(v) \ge l_g(u)$.* EgK

Zum Beweis betrachtet man eine offene Umgebung U von a, welche zu einem Riemannschen Gebiet (D, g) wie in 6.1 isometrisch ist. Die Umgebung W wird so konstruiert werden, daß sie in U enthalten ist und in D der Euklidischen Kugel $\|x\| < r$ entspricht. Wir bezeichnen diese Umgebung mit $a \in W(r) \subset X$. Die Zahl $r > 0$ wird man genügend klein zu wählen haben. Zu jedem $0 < \epsilon < 1$ kann man r so klein wählen, daß sich je zwei Punkte aus $W(r)$ innerhalb $W(r)$ durch eine Kurve u der Länge $l_g(u) < \varepsilon$ verbinden lassen. Man nehme einfach Euklidische Verbindungsstrecken in D. Aus 7.2 wird folgen, daß jede Kurve, die in $W(r)$ startet aber den Bereich $\|x\| \le 1$ verläßt, die Länge mindestens $1 - r$ hat.

Wählt man also r genügend klein, so existiert zu je zwei Punkten a, b aus $W(r)$ eine Verbindungskurve, welche jedenfalls kürzer ist als alle Verbindungskurven, welche nicht in U enthalten sind.

Aus diesem Grunde ist es für den Beweis von 7.1 ausreichend, X durch U zu ersetzen. Dann kann man aber gleich annehmen, daß X das Riemannsche Gebiet (D, g) ist. Für den Rest des Beweises arbeiten wir nur mit diesem Gebiet und nicht mehr mit der Mannigfaltigkeit X. Der ausgezeichnete Punkt a ist nun der Nullpunkt.

7.2 Hilfssatz. *Sei (D, g) ein Riemannsches Gebiet wie in 6.1 . Sei u eine stückweise glatte Kurve in $D - \{0\}$, welche durch zwei Punkte a mit $\|a\| = u$ und b mit $\|b\| = \beta$ läuft, $u < \beta$. Dann gilt* emM

$$l_g(u) \ge \beta - \alpha.$$

Anmerkung. *Wenn a und b auf derselben Geraden durch 0 liegen sollten, so ist $\beta - \alpha$ gleich der Länge der Vebindungsstrecke von a nach b und diese ist geodätisch.*

Zum erstenmal haben wir ein Resultat erhalten, welches zeigt, daß gewisse Geodätische kürzeste Verbindungen sind.

Beweis von 7.2 . Wir erinnern an die Formel

$$l_g(u) = \int_0^1 \|\dot u(t)\|_{g(u(t))}\,dt.$$

Wir nehmen hierbei o.B.d.A. an, daß $u(t)$ durch $0 \le t \le 1$ parametrisiert wurde. Wir können außerdem annehmen, daß $u(0) = a$ und $u(1) = b$ gilt. Dabei sei allgemein

$$\|x\|_s := \sqrt{s[x]} \quad (= \sqrt{\sum s_{ij}x_ix_j})$$

die von einer symmetrischen positiv definiten Matrix induzierte Norm.

Wir setzen

$$a(t) = \|u(t)\|_{g(u(t))}.$$

Wir schreiben $u(t)$ in „Polarkoordinaten",

$$u(t) = a(t)b(t), \quad \|b(t)\|_{g(u(t))} = 1.$$

Da $b(t)$ und $u(t)$ auf derselben Geraden durch 0 liegen, kann man 6.2 anwenden und erhält

$$\|b(t)\|_{g(u(t))} = \|b(t)\| \qquad \text{(Euklidische Norm)}.$$

Wir bilden die Funktion zweier Variabler

$$\alpha(s,t) = sb(t).$$

Die Kurve $u(t)$ schreibt sich dann

$$u(t) = \alpha(a(t), t).$$

Hieraus ergibt sich

$$\dot u = \frac{\partial\alpha}{\partial s}\,\dot a + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Be festem s veläuft diese auf einer Euklidischen Kugel um 0. Es folgt

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial s}, \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

wobei das Skalarprodukt bezüglich der Euklidischen Metrik zu bilden ist. Aus 6.3 folgt aber, daß dann auch $b(t) = \partial\alpha/\partial s$ und $\partial\alpha/\partial t$ aufeinander senkrecht bezüglich $g(u(t))$ stehen. Hieraus wiederum folgt

$$\|\dot u(t)\|^2_{g(u(t))} = \dot a(t)^2 + \left\| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right\|^2_{g(u(t))} \quad \ge \dot a(t)^2.$$

Dies ist die entscheidende Ungleichung. Aus ihr folgt

$$l_g(u) \ge \int_0^1 |\dot a(t)|\,dt \ge |a(1)| - |a(0)| = \beta - \alpha.$$

Damit ist 7.2 bewiesen. □

Diese Ungleichung zeigt ein bischen mehr:

7.3 Zusatz zu 7.2. *Wenn Gleichheit gilt, so ist notwendig* zemM

$$u(t) = a + p(t)(b - a)$$

mit einer monotonen surjektiven Funktion $p : [0,1] \to [0,1]$.

Fortsetzung des Beweises von 7.1 . Wir müssen die Exponentialfunktion $\exp_b$ zu variablem b betrachten und stützen uns hierbei auf 5.4 . In unserem Falle ist $TX = D \times \mathbb{R}^n$. Die offene Umgebung $(0,0) \in U$ in 5.4 können wir konvex wählen. Das Bild von U enthält eine Menge $U_1 \times U_2$, wobei U_1, U_2 offene Umgebungen von $0 \in D$ sind. Damit ist es leicht zu zeigen:

Sei $0 < r < 1$. *Es gibt eine offene Umgebung* $0 \subset W \subset D$ *mit folgender Eigenschaft: Zu jedem* $b \in W$ *existiert eine offene konvexe Nullpunktsumgebung* $U_b \subset \mathbb{R}^n$, *so daß* U_b *durch* $\exp_b$ *diffemomorph auf eine Umgebung* $0 \in V_b \subset D$ *abgebildet wird und so, daß*

$$W(\varepsilon) \subset V_b \subset W(r)$$

für eine geeignetes $0 < \varepsilon < r$ *gilt.*

Wir können ε so klein wählen, daß $W(\varepsilon) \subset W$ gilt. Damit wird $W(\varepsilon)$ ein Kandidat für eine geodätisch konvexe Umgebung. Damit können wir von einem beliebigen Punkt $b \in W(\varepsilon)$ ausgehend, die Gedodätische $\exp_b(tA)$ betrachten und so b mit jedem anderen Punkt $c \in W(\varepsilon)$ geodätisch verbinden. Diese verläuft zwar in V_b und damit in $W(r)$ aber möglicherweise nicht in $W(\epsilon)$. Glücklicherweise kann man beweisen, daß sie doch in $W(\varepsilon)$ verläuft, wenn r genügend klein gewählt wurde.

7.4 Hilfssatz. *Sei* (D, g) *ein Riemannsches Gebiet wie in 6.1 . Für genügend kleines* $0 < r < 1$ *gilt: Ist* $u(t)$ *eine Geodätische in* $W(r)$, *deren Anfangs- und Endpunkt in* $W(\varepsilon)$ *für irgendein* $0 < \varepsilon < r$ *enthalten sind, so ist* u *insgesamt in* $W(\varepsilon)$ *enthalten.* GiD

Beweis. Wir betrachten das Maximum von

$$h(t) := \|u(t)\|^2 \quad \text{(Euklidische Norm)}.$$

Wir schließen indirekt und nehmen an, daß $u(t)$ die Kugel $W(\varepsilon)$ irgendwann mal verläßt. Dann wird dieses Maximum in enem inneren Punkt $0 < t_0 < 1$ angenommen. Es gilt dann

$$\dot{h}(t_0) = 0, \quad \ddot{h}(t_0) < 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\ddot{h}(t_0)}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} = 1 + \frac{\langle \ddot{u}(t_0), u(t_0) \rangle}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} < 0.$$

Die Christoffelsymbole sind auf dem Kompaktum $\|x\| \leq 1/2$ beschränkt. Wir nehmen von vornherein $r < 1/2$ an. Aus der Differentialgleichung für Geodätische folgt eine Abschätzung

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq C\|\dot{u}(t)\|$$

mit einer Konstanten C, welche von $r < 1/2$ unabhängig ist. Wir erhalten

$$\frac{|\langle \ddot{u}(t_0), u(t_0)\rangle|}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} \leq C^2\|u(t_0)\|^2.$$

Wenn r genügend klein gewählt wurde, ist die rechte Seite < 1 im Widerspruch zu $\ddot{h}(t_0) < 0$. □

Fortsetzung des Beweises von 7.1 . Wir haben nun eine kleine Umgebung $W(r)$ konstruiert, so daß sich je zwei Punkte b, c innerhalb $W(r)$ durch eine Geodätische verbinden lassen, genauer durch eine Geodätische der Form $\exp_b(tA)$, $0 \leq t \leq 1$. Es ist zu zeigen, daß dies kürzeste Verbindung ist. Sei $u(t)$ eine (stückweise glatte) Verbindung. Wir wollen hierzu sinngemäß 7.2 für b anstelle von a anwenden. Dabei ist allerdings der Punkt b auszuschließen. Doch dies ist kein echtes Hindernis. Zunächst einmal gibt es ein größtes t_0, so daß $u(t_0) = b$ gilt. Da wir $u(t)$ eingeschränkt auf $[t_0, 1]$ betrachten können, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, $t_0 = 0$ anzunehmen. Man kann nun $l_g(u)$ beliebig gut approximieren, indem man u auf $[\varepsilon, 1]$ für genügend kleines ε einschränkt. Auf diese eingeschränkte Kurve kann man 7.2 anwenden.

Fortsetzung des Beweises von 7.1 . Es fehlt noch die Eindeutigkeitsaussage in 7.1 . Diese folgert man leicht aus 7.3 . Damit ist 7.1 vollständig bewiesen. □

8. Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

8.1 Theorem. *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit sind folgende Bedingungen gleichbeduetend:* VaB

1. *Der metrische Raum (X, d) ($d := d_X$, s. §2) ist vollständig (jede Cauchyfolge konvergiert).*
2. *Jede abgeschlossene und bezüglich d beschränkte Teilmenge ist kompakt.*
3. *Jede Geodätische ist auf ganz $\mathbb{R}$ definierbar.*
4. *Es gibt einen Punkt $a \in X$, so daß jede von a ausgehende Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definierbar ist.*

Eng zusammen mit diesem Theorem hängt

8.2 Theorem. *Sei X eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine Geodätische u, welche a mit b verbindet und welche kürzeste Verbindung ist ($l_g(u) = d(a,b)$).* EkV

Warnung. Die Geodätische u ist i.a. nicht eindeutig (Nord-un Südpol der Kugelfläche lassen sich durch verschiedene Großkreise verbinden.

Beweis der beiden Theoreme. Die Strategie ist folgende. Wir beginnen mit einem (X, g), welches einen Punkt $a \in X$ mit der Eigenschaft 3) besitzt. Wir betrachten dann die abgeschlossenen Kugeln

$$B_r(a) := \{\, x \in X; \quad d(a,b) \leq r \,\}.$$

Behauptung a): *Die Kugeln $B_r(a)$ sind kompakt.*

Wenn wir dies gezeigt haben, ist natürlich auch jede beschränkte und abgeschlossene Menge kompakt, wir haben dann also insbesondere 4)$\Rightarrow$ 2) bewiesen.

Zum Beweis der Behauptung a) betrachten wir die Menge $E_r(a)$ aller Punkte b, welche sich mit a durch eine Geodätische der Länge $d(a,b)$ verbinden lassen.

Behauptung b). *Die Teilmenge $E_r(a) \subset B_r(a)$ ist kompakt.*

Behauptung c). *Es gilt*

$$R_r(a) = B_r(a).$$

Es ist klar, daß mit b) und c) bewiesen sind. Aber nicht nur das, aus c) folgt auch Theorem 8.2 . Halten wir fest:

Aus den Behauptungen b) und c) ergibt sich

$$4) \Rightarrow 2) \qquad \text{und} \qquad \text{Theorem 8.2}\ .$$

Beweis von Behauptung b): Wir benutzen einen nicht ganz trivialen Satz aus der Theorie der metrischen Räume: Ein metrischer Raum ist (überdeckungs-) kompakt, wenn er folgenkompakt ist. Wir mßsen demnach zeigen, daß eine Folge $a_n \in E_r(a)$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $E_r(a)$ hat. Man erreicht a_n ausgehend von a durch eine Geodätische der Länge $d(a, a_n)$ mit einer gewissen Anfangsrichtung A_n. Aus der Konstanz der Geschwindigkeit und der Formel für die Bogenlänge ergibt sich die Beschränktheit von A_n. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, daß A_n konvergiert, sagen wir gegen A. Wir können dann die Geodätische ausgehend von a zu der Anfangsrichtung A betrachten. Ihren Wert bei $t = 1$ (wir legen immer das Parameterintervall $[0,1]$ zugrunde) sei b. Aus der stetigen Abhängigkeit der Geodätischen von den Anfangswerten folgt leicht $b_n \to b$. $\square$

Beweis von Behauptung c):