Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 5, Abgabe bis zum 20.11.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 15 Sei (X, dx) ein Raum mit Radonmaß und $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge. Gegeben sei eine Funktion $f : D \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ ist für jedes feste t meßbar,
2. die Funktion $t \mapsto f(t, x)$ ist für jedes feste x stetig differenzierbar,
3. es existiert eine integrierbare Funktion $h \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ mit

$$|f(t,x)| \leq h(x), \quad |\frac{d}{dt} f(t,x)| \leq h(x) \quad \forall x \in X, \ t \in D$$

Dann ist

$$F(t) := \int_X f(t,x)dx$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(t) = \int_X \frac{d(f(t,x))}{dt} dx.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 16 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man zeige, dass f auch Lebesgue-integrierbar ist und dass beide Integrale übereinstimmen. Man benutze, dass die charakteristischen Funktionen von einzelnen Punkten und von beschränkten offenen Intervallen Lebesgue-integrierbar sind und schließe mit dem Lebesgueschen Grenzwertsatz.

(4 Punkte)

Aufgabe 17 Sei (X, dx) ein Raum mit Radonmaß. Eine komplexwertige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar bzw. meßbar, falls dies auf ihren Real- und Imaginärteil zutrifft. Ist f integrierbar, so definiert man

$$\int_X f(x)dx = \int_X Re(f)(x)dx + i \int_X Im(f)(x)dx.$$

Wenn f meßbar ist und $|f|$ integrierbar, so ist auch f integrierbar. Man zeige:

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $y \to f(y)e^{-2\pi ixy}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.

Man nennt

$$\mathcal{F}(f)(x) := \hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi ixy}dy$$

die *Fouriertransformierte* von f.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *stark abklingend*, falls $f(x)P(x)$ für jedes Polynom $P(x)$ beschränkt ist. Man zeige: Ist f meßbar und stark abklingend, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) Man zeige, dass die Fouriertransformierte einer $\mathcal{L}^1$-Funktion im Allgemeinen nicht wieder in $\mathcal{L}^1$ liegt. Betrachte dazu die stark abklingende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(d) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *temperiert*, falls sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und falls f und alle seine partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung stark abklingend sind. Die Menge aller temperierten Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ heißt der *Schwartzraum* $S(\mathbb{R}^n)$. Man zeige, dass die Fouriertransformierte einer temperierten Funktion wieder temperiert ist. Es genügt, dies im Fall $n = 1$ zu zeigen.

Tipp: Man betrachte $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ixy}dy$ und integriere partiell.

(2+2+2+3 = 9 Punkte)