Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 1, Abgabe bis zum 23.10.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 1 Sei $a \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Man zeige, dass durch

$$C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(a),$$

ein Radonmaß definiert ist (das sogenannte Dirac-Maß).

(3 Punkte)

Aufgabe 2 Die Funktion $exp(-1/x^2)$ kann als eine C^∞-Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt werden. Konstruiere damit eine Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, die nicht identisch Null ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3 Konstruiere eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 2, \\ 1 & \text{für } |x| < 1. \end{cases}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f = g - h$, wobei g und h Funktionen der Baireschen Klasse seien, welche den Wert ∞ nicht annehmen und deren Integral endlich ist. Man zeige:

(a) $\mathcal{V}$ ist ein Vektorraum.
(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $I : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, welche auf $\mathcal{V} \cap B^+$ mit dem "Baireschen Integral" übereinstimmt.

(2+2 = 4 Punkte)