Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 12, Abgabe bis zum 26.06.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 45 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion und

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le f(z),\ a \le z \le b\}.$$

Man beweise die Volumenformel

$$vol(M) = \pi \int_a^b f^2(z)dz.$$

Und weil's so schön ist, berechne man gleich noch als Anwendung das Volumen der Kugel mit Radius $r > 0$:

$$K_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}.$$

(4+2 = 6 Punkte)

Aufgabe 46 Man berechne das Volumen der Punktmenge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z)^2 + (y + z)^2 + z^2 \le 1\}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 47 Ein (materieller) Körper im $\mathbb{R}^3$ wird definiert durch eine kompakte Punktmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine positive stetige Funktion $\rho : K \to \mathbb{R}$, die sogenannte Massendichte. Man bezeichnet

$$\mu = \int_K \rho(x)dx$$

als die Masse des Körpers,

$$\xi = \frac{1}{\mu} \int_K \rho(x) x dx$$

als seinen Schwerpunkt und

$$\theta(a_1, a_2) = \int_K \rho(x)((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2) dx$$

als sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2$. Der Körper heißt homogen, wenn ρ konstant ist.

(a) Man berechne den Schwerpunkt der homogenen Halbkugel

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ x_3 \geq 0\}.$$

(b) Sei nun

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2,\ |x_3| \leq 1\}$$

und $\rho(x) = e^{c(x_1^2 + x_2^2)}$ mit reellen Konstanten R und c. Man berechne die Masse μ des Körpers (K, ρ) und sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse $x_1 = 0,\ x_2 = 0$.

(c) Es seien

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\},\ K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}.$$

Wie sind die Massendichten ρ_i der homogenen Körper (K_i, ρ_i), $i = 1, 2$, zu wählen, damit Massengleichheit erreicht wird, dh. $\mu(K_1, \rho_1) = \mu(K_2, \rho_2)$?

(2+2+2 = 6 Punkte)