Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 9, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 33b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. Dann hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{np+q}$ den Konvergenzradius $\sqrt[p]{r}$. Die grobe (!) Idee: Schreibe $x^{np+q} = x^{np} \cdot x^q$. Den x^q-Faktor kann man einfach ignorieren: Es ist nur ein konstanter Faktor und beeinflußt die Konvergenz nicht. Man setzt nun $x^p =: y$ und erhält einen Konvergenzradius für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Will man zurückrechnen, so muß man die p-te Wurzel ziehen.

Aufgabe 34 b) Die Polardarstellung von $2i$ ist $2e^{\frac{\pi}{2}i}$. Begründung: Es ist $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, also $r = 2$. Für φ: Suche $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $cos(\varphi) = 0$ und $sin(\varphi) = 1$. Daraus folgt $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Also $z = 2(cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2})) = 2exp(\frac{\pi}{2}i)$.

Aufgabe 35 i) Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, daß es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Folge $(\cos(nc))_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist. Dann folgt aus der Gleichheit:

$$\cos(2nc) = \cos^2(nc) - \sin^2(nc) ,$$

daß $(\sin^2(nc))_{n\geq 0}$ auch eine Nullfolge ist. Dies widerspricht aber der Gleichheit:

$$\sin^2(nc) + \cos^2(nc) = 1 .$$

(b) Wir suchen nun alle $c \in \mathbb{R}$, für welche die Folge $(\sin(nc))_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist. Für alle c von der Gestalt $c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist diese Folge die konstante Null–Folge ist. Die Werte $c := k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sind die einzigen Werte $c \in \mathbb{R}$, welche die Relation $\sin c = 0$ erfüllen.

Wir zeigen nun, daß es keine weiteren $c \in \mathbb{R}$ gibt, $\sin c \neq 0$, so daß die Folge $(\sin(nc))_{n\geq 0}$ gegen Null konvergiert. Widerspruchsbeweis: Sei $c \in \mathbb{R}$,

$\sin(c) \neq 0$, mit $\sin(nc) \to 0$ für $n \to \infty$. Aus der Gleichheit:

$$\sin((n+1)c) = \sin(nc)\cos(c) + \cos(nc)\sin(c)$$

folgt aus $\sin((n+1)c) \to 0$, $\sin(nc) \to 0$ für $n \to \infty$ dann $\cos(nc)\sin(c) \to 0$, also $\cos(nc) \to 0$, da $\sin(c) \neq 0$ ist. Widerspruch zu (a).

Aufgabe 36 (a) OBdA $(a,b) \neq (0,0)$ (sonst $A = 0$). Dann gilt $a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) = A \cdot sin(x+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2} cos(x)}\right)$. Setze $A := \sqrt{a^2+b^2}$ und φ so, dass $cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $cos(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Die Behauptung folgt aus den Additionstheoremen. Es gilt

$$\varphi = \begin{cases} arccos(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } b \geq 0 \\ -arccos(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{für } b < 0. \end{cases}$$

(b) Das sind einfache Anwendungen der Additionstheoreme. Exemplarisch sei i) vorgeführt. (i) Die Funktionen sind für $x \in [-1,1]$ definiert. Man sieht leicht, dass $sin(arccos(x)) > 0$, $cos(arcsin(x)) > 0$. Mit $sin^2(arccos(x)) = 1 - cos^2(arccos(x)) = 1 - x^2$ und $cos^2(arcsin(x)) = 1 - sin^2(arcsin(x)) = 1 - x^2$ folgt die Behauptung.

ii) Die Funktionen sind überall definiert.

iii) Diese Funktion ist auf $(0,1)$ definiert.