Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 8, Abgabe bis zum 05.12.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 29 Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf einem nach oben unbeschränkten Intervall definierte Funktion. Man definiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ wie im Skript S. 131.

Es sei nun α eine beliebige reelle Zahl > 0 und $x > 0$. Man zeige:

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0,$

$(b)\ \lim\limits_{x\to 0}(x^\alpha log(x)) = 0.$

(2+1 = 3 Punkte)

Aufgabe 30 Zeige: Die Folge der Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

(3 Punkte)

Aufgabe 31 Zeige: Die durch $f_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{nx}$ definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ hat die Eigenschaften:
(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
(b) Für jedes $a > 0$ ist die Folge auf $[a, \infty[$ gleichmäßig konvergent.
(c) Die Folge konvergiert nicht gleichmäßig auf $]0, \infty[$.

(1+2+2 = 5 Punkte)

Aufgabe 32 Die Funktionen *cosh* (cosinus hyperbolicus) und *sinh* (sinus hyperbolicus) sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$cosh(x) := \frac{exp(x) + exp(-x)}{2} \quad sinh(x) := \frac{exp(x) - exp(-x)}{2}.$$

(a)

$$\begin{aligned} cosh(x+y) &= cosh(x) \cdot cosh(y) + sinh(x) \cdot sinh(y) \\ sinh(x+y) &= sinh(x) \cdot cosh(y) + cosh(x) \cdot sinh(y) \\ sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

(b) Untersuche *sinh* und *cosh* auf Stetigkeit.

(c) Zeige: *sinh* ist streng monoton wachsend.

(d) Bestimme zu $f = sinh$ den Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} sowie eine explizite Darstellung von f^{-1}.

(1+1+1+2 = 5 Punkte)