Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 7, Abgabe bis zum 28.11.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 25 (a) Finde alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Tipp: Man kann etwa zuerst alle $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ suchen, die die Gleichung erfüllen.

(3 Punkte)

Aufgabe 26 Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 1/q & \text{falls } x \in \mathbb{Q},\ x = p/q \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst, dh. } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Hierbei darf (und soll) angenommen werden, dass sich jede rationale Zahl eindeutig als Bruch $x = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q \geq 1$, schreibt. Dabei gilt $0 = 0/1$. Finde alle Stellen $x \in \mathbb{R}$, an welchen die Funktion f stetig ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 27 Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$f(x) = \alpha$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ genau zwei reelle Lösungen hat?

(3 Punkte)

Aufgabe 28 Man untersuche die Existenz der nachfolgenden Grenzwerte und bestimme ggf. ihren Wert.

$$(a)\quad \lim_{x\to 2,\ x\neq 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right),$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 0,\ x\neq 0}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right),$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 1,\ x\neq 1}\frac{x^n-1}{x-1}\ \text{für } n\in\mathbb{N},$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 0,\ x\neq 0}\frac{sin(x)}{x}\ \text{mit } sin(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

(1+1+1+2 = 5 Punkte)