Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 7, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 25

Wie in der Aufgabenstellung angegeben, konstruieren wir erst alle Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung erfüllen. Dazu benutzen wir die Darstellung $x = m/n$ für jede rationale Zahl. Wir bestimmen erst alle Funktionen, die die Gleichung für ganze Zahlen erfüllen und nutzen dann die Bruchdarstellung aus, um das Resultat auf eine beliebige rationale Zahl zu übertragen.

Aus $f(0+0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$. Der Wert $f(1)$ ist "frei". Setze $a := f(1) \in \mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Per Induktion folgt:

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ Mal}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \text{ Mal}} = nf(1) = an.$$

Wir beweisen für alle $x \in \mathbb{Q}$ die Gleichung $f(nx) = nf(x)$. Für $n = 0$ ist das klar. Wir nehmen des weiteren an, daß für ein festes n gilt: $f(nx) = nf(x)$, $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist:

$$f((n+1)x) = f((nx)+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x) \ .$$

Per Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$. Falls $m \geq 0$ ist, so gilt $f(m) = mf(1) = am$. Falls $m \leq 0$ ist, schreibe $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Die gegebene Funktionalgleichung für f liefert als Spezialfall:

$$f(m) + f(n) = f(m+n) = f(0) = 0 \ .$$

Also ist $f(m) = -f(n) = -(an) = a(-n) = am$.

Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann ist x von der Form $x = m/n$, mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Dann ist

$$nf(x) = f(nx) = f(m) = am \ , \quad \text{also } f(x) = a\frac{m}{n} = ax \ .$$

Also ist f von der Form $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Umgekehrt sieht man leicht, daß all diese Funktionen die gegebene Funktionalgleichung erfüllen.

Nun zur eigentlichen Aufgabe. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der obigen Eigenschaft für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (und insbesondere in $\mathbb{Q}$) für $a := f(1) \in \mathbb{R}$ erfüllt die Gleichung

$$f(r) = ar \qquad \text{falls } r \in \mathbb{Q} \ .$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Man kann eine rationale Folge (r_n) finden, welche gegen x konvergiert, beispielsweise ist die q-adische Entwicklung einer reellen Zahl eine solche Folge. Dann gilt wegen der Stetigkeit von f:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \overset{(!)}{=} \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} (ar_n) = a \lim_{n\to\infty} r_n = ax \ .$$

Es folgt, daß f von der Form $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, wobei $a := f(1)$ ist. Umgekehrt sind die Funktionen von der Form $f(x) := ax$ stetig auf $\mathbb{R}$ und erfüllen die gegebene Gleichung.

Aufgabe 26 Lösung:

1. f ist nicht stetig an den rationalen Stellen $r \in \mathbb{Q}$.
2. f ist stetig an den irrationalen Stellen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(1) Sei $r = p/q \in \mathbb{Q}$ rational, so daß gilt $f(r) = 1/q \neq 0$. Die Folge $(r + \sqrt{2}/n)$ besteht dann aus nicht rationalen Gliedern und konvergiert gegen r. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(r + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq \frac{1}{q} = f(r) \ .$$

Es folgt die Unstetigkeit von f in r.

Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also $f(x) = 0$. Sei (y_n) eine Folge, welche gegen x konvergiert. Wir zeigen die Konvergenz von $f(y_n)$ gegen $f(x) = 0$.

Sei $\epsilon > 0$. Es gibt nur endlich viele natürliche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ mit $1/q \geq \epsilon$. Also gibt es auch nur endlich viele rationale Zahlen p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit $1/q \geq \epsilon$, welche im Intervall $(x-1, x+1)$ liegen: $r_1, r_2, \ldots, r_K$.

Wichtiger ist, daß wir das Minimum bilden können:

$$\epsilon_1 := \min_{j=1,\ldots,K} |r_j - x| > 0 \ .$$

(Dieses Minimum kann nicht gleich Null sein, da $r_j \in \mathbb{Q}$, $x \notin \mathbb{Q}$.)

Sei $\epsilon_2 > 0$ das Minimum von ϵ_1 und 1. Aus $y_n \to x$ folgt die Existenz von $N = N(\epsilon_2) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ gilt: $|y_n - x| < \epsilon_2$.

Sei nun $n \geq N$. Aus $\epsilon_2 \leq 1$ folgt zuerst $|y_n - x| < 1$, also $y_n \in (x-1, x+1)$. Wir schätzen $|f(y_n) - f(x)| = |f(y_n) - 0| = |f(y_n)| = f(y_n)$ nach oben ab.

Ist y_n nicht rational, so ist $f(y_n) = 0$.

Ist y_n rational, so ist der Nenner von y_n nicht in der Menge aller $q \in \mathbb{N}$ mit $1/q \geq \epsilon$, da $|y_n - x| < \epsilon_2$ also insbesondere $y_n \notin \{r_1, \ldots, r_K\}$ ist. Es folgt $0 \leq f(y_n) < \epsilon$.

Fazit: Zu jedem $\epsilon > 0$ haben wir ein $N \in \mathbb{N}$ konstruiert, so daß für alle $n \geq N$ gilt: $|f(y_n) - f(x)| < \epsilon$. Also ist f an den irrationalen Stellen stetig.

Aufgabe 27 Nein. Benutze Zwischenwertsatz.