Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 6, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 21 (b) Setze $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 < s_{n+m} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+2)^k} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Da $s_n < e$ und $\lim_{m\to\infty} = e$, erhält man

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{nn!}.$$

(c) Annahme: e sei rational, $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Nach (b) gilt

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Nach Annahme ist $q!e \in \mathbb{N}$. Da auch $q!s_q = \sum_{k=1}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, ist $q!(e - s_q)$ ganz, was nach $0 < q!(e - s_q) < 1$ nicht möglich ist.

Aufgabe 22 Die bis zum n-ten Tag gemessene Wegstrecke (vom Boden aus) ist

$$s_n := 1 + (q + q) + (q^2 + q^2 + q^2) + \ldots nq^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)q^k.$$

Das kann man in der Form

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} q^j q^{(n-1)-j} = \sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j})$$

schreiben. Die Schnecke erreicht den Rand des Brunnens genau dann in endlicher Zeit, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $s_n \geq 4$. Die Summe s_n ist genau die Partialsumme des Cauchyproduktes der geometrischen Reihe mit sich selbst:

$$\sum q^k \cdot \sum q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j}).$$

Da alle $q \geq 0$, existiert ein n mit $s_n \geq 4$ genau dann wenn der Grenzwert von s_n größer (!) 4 ist. Es gilt

$$4 < \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j}) = \sum q^k \cdot \sum q^k = \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q}$$

ist äquivalent zu

$$(1-q)^2 < \frac{1}{4},$$

also zu $q > \frac{1}{2}$. Also muß $q > 1/2$ sein. Für $q = 1/2$ nähert sich die Strecke nur beliebig nah dem Brunnenrand an, ohne ihn aber in endlicher Zeit zu erreichen (muß frustrierend sein).

Aufgabe 23 (a) Die Idee (hier fehlen Zwischenschritte). Sei $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ mit $i \in \mathbb{N}$. Es gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}(A_i) =$ Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, wobei die $\mathfrak{P}(A_i)$ endlich sind. Umgekehrt gibt es für jede endliche Teilmenge M ein A_i mit $M \subseteq A_i$. Dann gilt folgendes Abzählschema:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{P}(A_1) & \emptyset \arrow[r] & \{1\} \arrow[dr] & & & & & & \\
\mathfrak{P}(A_2) & \emptyset & \{1\} & \{2\} \arrow[r] & \{1,2\} \arrow[dr] & & & & \\
\mathfrak{P}(A_3) & \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} & \{3\} \arrow[r] & \{1,3\} \arrow[r] & \{2,3\} \arrow[r] & \{1,2,3\} \arrow[d] \\
\mathfrak{P}(A_4) & \cdots & & & & & & & \{4\}
\end{tikzcd}$$

usw. Also ist die Menge abzählbar.

(b) Laut Skript S. 57 ist die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller 0/1-Folgen überabzählbar. Also kann man für die Lösung der Aufgabe eine Bijektion $f : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ konstruieren. Sei $M \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Dann definiere $f(M) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n := \begin{cases} 1 \text{ falls } n \in M \\ 0 \text{ falls } n \notin M. \end{cases}$$

Mit anderen Worten: x_n ist die charakteristische Funktion von M. Man überprüfe, dass f bijektiv ist.