Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 5, Abgabe bis zum 14.11.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 17) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n}{n},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+(-1)^n}.$$

(1+1+1 = 3 Punkte)

Aufgabe 18) (a) Sei (x_n) eine monoton fallende Folge reeller Zahlen ≥ 0. Zeige: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn die *verdichtete* Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ konvergiert.

(b) Zeige als Anwendung von (a), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ für alle ganzen $a > 1$ konvergiert und für alle $a \leq 1$ divergiert.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 19) (a) Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert. Anleitung: Führe dazu eine Zerlegung der Form

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+1}$$

durch.

(b) Zeige unter Benutzung von (a), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ für jede ganze Zahl $a > 1$ konvergiert.

(2 + 1 = 3 Punkte)

Aufgabe 20) Eine reelle Zahl schreibt man normalerweise in Form ihrer Dezimaldarstellung:

$$\begin{aligned}\pi &= 3.14159\ldots \\ &= \ldots 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + \ldots\end{aligned}$$

Anstatt der Basis 10 kann man aber genauso gut eine beliebige ganze Zahl $q \geq 2$ als Basis nehmen. Diese Darstellung wird dann als die q-*adische* Darstellung der reellen Zahl bezeichnet. Genauer: Sei $y \in \mathbb{R}$ und OBbA $y > 0$. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und Zahlen $a_0, a_{-1}, ..., a_{-m} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ mit $a_{-m} \neq 0$ sowie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, \ldots, q-1\}\, \forall n \in \mathbb{N}$, so dass $x = \sum_{n=0}^{m} a_{-n} q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{-n}$ gilt, so heißt $\sum_{n=0}^{m} a_{-n} q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{-n}$ q-adische Darstellung von y. Wir wollen die Existenz dieser Darstellung beweisen.

Sei $q \geq 2$ eine ganze Zahl. Jede reelle Zahl $y > 0$ schreibt sich eindeutig als Summe $y = k + x$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [0, 1)$ (klar).

(a) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ beliebige Elemente der Menge $\{0, 1, \ldots, q-1\}$. Zeige die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, q^{-n}$.

(b) Sei $x \in [0, 1)$. Zeige die Existenz von $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ aus der Menge $\{0, 1, \ldots, q-1\}$, so dass gilt: $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, q^{-n}$. Ist diese Darstellung eindeutig?

Hinweis: Konstruiere $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ induktiv. Falls die "Ziffern" $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bereits "richtig" konstruiert sind, zeige, dass sich die reelle Zahl

$$q^n \cdot \left(x - \sum_{j=1}^{n-1} a_j\, q^{-j} \right)$$

im Intervall $[0, q)$ befindet. Wähle dann a_n geeignet.

(c) Konstruiere nun die q-adische Darstellung für den ganzzahligen Anteil k von y. Ist diese eindeutig?

(d) Was sind die 2–adischen Darstellungen von 1/7 und 1/5?

(1+3+1+2 = 7 Punkte)