Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 4, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 13

Wir beweisen: (a) $\Longrightarrow$ (b):

Sei (a_n) eine Cauchyfolge und $b_n = a_{n+1} - a_n$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$. Mit $m = n + 1$ folgt $|b_n| = |a_{n+1} - a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Also ist (b_n) eine Nullfolge. $\square$

Wir beweisen (b) $\Longrightarrow$ (c):

Wir zeigen durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, dass $(b_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, wenn $(b_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist: Der Induktionsanfang $k = 0$ ist klar, da $b_n^0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit (b_n^1) ist aber auch die verschobene Folge b_{k+n}^1 eine Nullfolge, denn gilt $|b_n^1| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$, so gilt auch $|b_{n+k}^1| < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$.

Nun gilt:

$$b_n^{k+1} = a_{n+k+1} - a_n = (a_{n+k+1} - a_{n+k}) + (a_{n+k} - a_n) = b_{n+k}^1 + b_n^k.$$

Da die Summe zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, folgt aus der Nullfolgeneigenschaft von b_n^k die von b_n^{k+1}.

Wir widerlegen die Implikation: (c) $\Longrightarrow$ (a): Sei $a_n = \sqrt{n}$. Da die Folge unbeschränkt ist, kann sie keine Cauchyfolge sein. Denn für jedes $k \in K$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $m > k$. Dann ist $a_{m^2} = \sqrt{m^2} = m > k$.

Weiter gilt:

$$b_n^k = a_{n+k} - a_n = \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}}{1} = \frac{(\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+k} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+k}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} < \frac{k}{\sqrt{n}}$$

Für alle $n > \left(\frac{k}{\epsilon}\right)^2$ folgt $0 < b_n^k < \epsilon$.

Aufgabe 15

(a) Gilt $a_n^2 \geq x \cdot 7^{2n}$, so folgt $(7a_n)^2 \geq 7^2 \cdot (x \cdot 7^{2n}) = x \cdot 7^{2(n+1)}$. Damit ist $7a_n$ eine natürliche Zahl a mit $a^2 \geq x \cdot 7^{2(n+1)}$. Da a_{n+1} die kleinste solche Zahl ist, folgt: $7 \cdot a_n \geq a_{n+1}$. Daraus folgt

$$b_{n+1} = a_{n+1} \cdot 7^{-(n+1)} \leq (7a_n) \cdot 7^{-(n+1)} = a_n \cdot 7^{-n} = b_n$$

Da die Folge der natürlichen Quadratzahlen streng monoton wächst, ist $a_n - 1$ die größte natürliche Zahl a mit $a^2 < x \cdot 7^{2n}$. Es folgt wie oben $7(a_n - 1) \leq (a_{n+1} - 1)$. Daraus folgt sofort $c_{n+1} \geq c_n$.

Wegen $c_n \leq b_n$ ist somit (c_n) eine monoton steigende Folge, die durch b_1 beschränkt ist, und (b_n) ist eine monoton fallende Folge, die durch c_1 nach unten beschränkt ist. Also sind (b_n) und (c_n) konvergente Folgen.

(b) Da 7^{-n} in einem archimedisch angeordneten Körper eine Nullfolge ist, konvergiert mit (b_n) auch die Folge $c_n = b_n - 7^{-n}$ gegen den Grenzwert y.

Aus den Definitionen folgt sofort $b_n^2 \geq x$ und $c_n^2 < x$. Da die $\leq$ und $\geq$ Relationen beim Übergang zum Grenzwert erhalten bleiben, schließt man:

$$y^2 = (\lim_{n\to\infty} b_n)^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 \geq x$$

und analog $y^2 \leq x$. Daraus folgt aber $y^2 = x$. $\square$

(c) Wäre $\mathbb{Q}$ vollständig, so würde nach dem eben bewiesenen jede rationale Zahl $x > 0$ das Quadrat einer anderen rationalen Zahl sein. Das stimmt aber nach Aufgabe 5 nicht für diejenigen natürlichen Zahlen, die kein Quadrat einer anderen natürlichen Zahl sind, z.B. für $x = 2, 3, 5, 6, \ldots$ Wegen dieses Widerspruchs kann $\mathbb{Q}$ nicht vollständig sein. $\square$