Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 3, Abgabe bis zum 31.10.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 9)

(a) Man bestimme Supremum und Infimum (falls vorhanden) der Mengen

$$\left\{\frac{\mid x \mid}{1+\mid x \mid} \mid x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \left\{\frac{x}{1+x} \mid x \in \mathbb{R},\, x > -1\right\}.$$

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $a = sup(M)$. Zeige, dass es eine monoton wachsende Folge (a_n) gibt mit $a_n \in M \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 10) Untersuche, ob die folgenden Folgen konvergent sind und bestimme ggf. den Grenzwert:

(a) $x_n = \frac{n}{a^n}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $|a| > 1$.

(b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

(1+1+1 = 3 Punkte)

Aufgabe 11)

(a) Definiere die Folge (x_n) durch $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Bestimme den Grenzwert α der Folge $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$. Tipp: Man kann zum Beispiel die beiden Teilfolgen y_{2n} und y_{2n+1} untersuchen.

(b) Zeige, dass die durch $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ definierte Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert α. Zeige dazu erst, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Es kann nützlich sein, die Folge rekursiv zu schreiben.

(c*) (Freiwillige Zusatzaufgabe, 1 Zusatzpunkt) Ein Kettenbruch ist ein Ausdruck der Form

$$\alpha = \ a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

Bei (a) und (b) erhält man den gleichen Grenzwert α. Stelle diesen als Kettenbruch dar. Tipp: Man schaue sich die Rekursionsbeziehung in (a) an.

Bei dieser Aufgabe darf ohne Beweis benutzt werden, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$ gilt. Wer die Aufgabe ohne diese Info schafft, erhält einen Zusatzpunkt.

(3+2 = 5 Punkte)

Aufgabe 12)

Es seien (x_n), (y_n) und (z_n) drei Folgen in $\mathbb{R}$, so daß die Folgen (x_n) und (z_n) gegen $l \in \mathbb{R}$ konvergieren. Für alle natürlichen Zahlen n gelte:

$$x_n \leq y_n \leq z_n \ .$$

Behauptung: (y_n) konvergiert gegen l.

(3 Punkte)