Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 2, Abgabe bis zum 24.10.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 5) Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die das Quadrat einer rationalen Zahl $\xi \in \mathbb{Q}$ sei: $d = \xi^2$. Zeige, dass $d = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. OBdA ist $\xi \geq 0$. Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $m \cdot \xi \in \mathbb{N}$ und $m > 0$, und n sei die kleinste natürliche Zahl mit $\xi \leq n$.

(a) Warum existiert diese?

Setze $p = m \cdot (\xi - n + 1)$. Zeige:

(b) $p \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq m$;

(c) $p \cdot \xi \in \mathbb{N}$;

(d) $p = m$ und $\xi = n$.

Folgerung: Ist $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, d.h. $d \in \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots\}$, so hat die Gleichung $x^2 = d$ keine Lösung mit $x \in \mathbb{Q} = F$. Also erhält man via Aufgabe 3 einen Körper K. Wegen $(0, 1) \cdot (0, 1) = (d, 0) = d$, ist in diesem Körper die vorher unlösbare Gleichung $x^2 = d$ lösbar. Die Lösung bezeichnen wir (symbolisch) mit $\sqrt{d} = (0, 1)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 6 Zeige: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1, x^2 < 5\}$ hat eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$, aber keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$.

Folgerung: $\mathbb{Q}$ ist kein vollständig angeordneter Körper.

(3 Punkte)

Aufgabe 7 Beweise für $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion:

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

(b) Die Gleichung
$$x^2 + y^2 = z^n$$
hat unendlich viele Lösungen $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Die Aussage von (b) wird unendlich viel schwieriger, wenn man eine Gleichung der Form $x^k + y^k = z^k$ für $k \geq 3$ betrachtet. In diesem Fall gibt es gar keine Lösung in $\mathbb{N}$, ein Resultat, das unter dem Namen "Großer Fermatscher Satz" bekannt ist und erst in den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts gelöst wurde.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 8) (a) Es gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und für $0 \leq k < n$ ist
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(b) Zeige $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Ist A eine n-elementige Menge, so ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen.

(2+2 = 4 Punkte)