Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 2, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 5 Bei dieser Aufgabe war Teil a) schlecht formuliert und hat daher einigen Leuten Probleme bereitet. Sorry.

a) Zur Wohldefiniertheit von m und n: Sei OBbda $\xi \geq 0$, $\xi = \frac{r}{s}$. Da $\frac{r}{s} = \frac{-r}{-s}$, kann OBdA $s > 0$ angenommen werden. Wegen $\xi \geq 0$ ist dann auch $r = \xi s \geq 0$. Also ist $s > 0$ eine natürliche Zahl mit $s\xi \in \mathbb{N}$. Da jede nichtleere Teilmenge von natürlichen Zahlen ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element enthält, ist m wohldefiniert. Wegen $1 \leq s$ und $\xi > 0$ folgt $\xi = 1\xi \leq s\xi = r \in \mathbb{N}$, dh. es gibt eine natürliche Zahl r mit $\xi \leq r$. Wir wählen die kleinste dieser Zahlen und nennen sie n.

b) $p = m(\xi - n + 1) = m\xi + m(1 - n)$. Beide Summanden sind in $\mathbb{Z}$, also $p \in \mathbb{Z}$. Da n die kleinste natürliche Zahl mit $\xi \leq n$ ist, gilt $n - 1 < \xi$. Also folgt $\xi - n + 1 > 0$ und damit $p = m(\xi - n + 1) > 0$, also $p \in \mathbb{N}$. Wegen $\xi \leq n$ gilt $\xi - n + 1 \leq 1$ und damit $p = m(\xi - n + 1) \leq m1 = m$. Also gilt $0 < p \leq m$.

c) $p\xi = m(\xi - n + 1)\xi = m\xi^2 + m(1 - n)\xi = md + m\xi(1 - n)$. Da m, d, $m\xi$ und $1 - n \in \mathbb{N}$, gilt $p\xi \in \mathbb{Z}$. Da $p > 0$, $\xi \geq 0$ ist auch $p\xi \geq 0$ und damit $p\xi \in \mathbb{N}$.

d)Da $p \in \mathbb{N}$ und $p\xi \in \mathbb{N}$ und m die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist, folgt $m \leq p$. Nach (b) ist aber $p \leq m$, also $p = m$. Also $m(\xi - n + 1) = m$. Also $m(\xi - n) = 0$. Da $m \neq 0$ gilt also $\xi = n$.

Folgerung: Ist $x^2 = d$ nicht in $\mathbb{N}$ lösbar, so auch nicht in $\mathbb{Q}$. Beispiel: Da $x^2 = 5$ nicht in $\mathbb{N}$ lösbar ist, ist sie auch nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar. Beispielsweise erhält man somit nach Aufgabe 3 einen Körper $\mathbb{Q}(5)$. Außerdem ist das Wissen für die nächste Aufgabe sehr nützlich.

Aufgabe 6 Die grobe Idee: Die Existenz einer oberen Schranke ist klar, beispielweise ist 2008 eine obere Schranke... Sei $x \in \mathbb{Q}$ die kleinste obere Schranke von M. Dann gilt entweder $x^2 < 5$ oder $x^2 > 5$ oder $x^2 = 5$ (klar...). Im Fall $x^2 < 5$ kann man eine kleinere obere Schranke als x konstruieren - Widerspruch. Genauso kann man im Fall $x^2 > 5$ ein $s \in M$ konstruieren, so dass $s > x$ ist - wieder ein Widerspruch. Also bleibt nur noch $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 5$. Das ist aber nach Aufgabe 5 nicht möglich.

Aufgabe 7b Für $n = 1$ ist das klar. Bei $n = 2$ sind $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 5k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (hier ist $0 \neq \mathbb{N}$) Lösungen der Gleichung. Seien nun (Induktionsannahme) x, y, z Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^n$. Wir zeigen, dass man jede solche Lösung *liften* kann. Multipliziere die Gleichung mit z^2. Dann gilt

$$z^n z^2 = z^{n+2} = (x^2 + y^2)z^2 = (xz)^2 + (yz)^2.$$

mit z, xz und $yz \in \mathbb{N}$. Mit vollständiger Induktion ergibt sich die Behauptung (der Schritt von n auf $n+2$ ist möglich, da wir für $n = 1$ und $n = 2$ verankert haben).

Aufgabe 8b Beweis mit vollständiger Induktion nach n unter Benutzung von (a): Für $k = 0$ ist die Behauptung richtig: Jede Menge enthält genau eine 0 elementige Teilmenge, nämlich $\emptyset$. Damit ist dann auch der Induktionsanfang $n = 0$ klar.

Ist eine $n+1$ elementige Menge A gegeben und $a \in A$ fixiert, so kann man für $k \geq 0$ die $k+1$ elementigen Teilmengen $B \subset A$ aufteilen in solche mit $a \notin B$, wobei B dann die $k+1$ elementigen Teilmengen der n elementigen Menge $A \backslash \{a\}$ durchläuft, und in solche mit $a \in B$. Letztere sind von der Form $\{a\} \cup B'$, wobei B' sämtliche n elementigen Mengen von $A \backslash \{a\}$ durchläuft. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich, dass die rechte Seite von (a) die Anzahl der $k+1$ elementigen Teilmengen von A darstellt. Wegen (a) ergibt sich die Behauptung, da der Fall der 0 elementigen Teilmengen ja schon behandelt wurde.