Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 11, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 42 (a) Aus den Additionstheoremen leitet man leicht die folgenden Formeln her (siehe auch Skript, S.109):

$$sin(x) - sin(y) = 2cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})$$
$$cos(x) - cos(y) = -2sin(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2}).$$

Wir berechnen nun die Ableitung des sinus:

$$\begin{aligned} sin'(x) :&= \lim_{x\to x_0} \frac{sin(x) - sin(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{2cos(\frac{x+x_0}{2})sin(\frac{x-x_o}{2})}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} cos(\frac{x+x_0}{2}) \lim_{x\to x_0} \frac{sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}. \end{aligned}$$

Wenn $x \to x_0$, geht $\frac{x-x_0}{2}$ gegen Null. Mit Aufgabe 28d) folgt, dass der zweite Ausdruck gegen 1 geht. Wegen der Stetigkeit des cosinus kann man den Grenzwert hereinziehen und erhält

$$\lim_{x\to x_0} cos(\frac{x+x_0}{2}) = cos(x),$$

also $sin'(x) = cos(x)$. Die Rechnung für den cosinus geht ganz analog.

Die Ableitung für den tangens erhält man einfach aus der Kettenregel, siehe Skript S.154: $tan'(x) = 1 + tan^2(x)$.

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \infty$$

(Die letzte saloppe Schreibweise sollte man besser nicht in der Klausur verwenden...) Offensichtlich ist f stetig und damit surjektiv auf $(2,\infty)$ (Zwischenwertsatz). Um die Umkehrbarkeit auf diesem Intervall zu zeigen, muß die Injektivität überprüft werden. Dazu zeigen wir, dass f streng monoton wachsend ist.

Es ist $f'(x) = 2\frac{sin(x)-xcos(x)}{sin^2(x)}$ (Quotientenregel). Die Ableitung ist 0 gdw $x = tan(x)$ (auf dem Intervall $(0,\pi)$). Da der tangens auf $(\pi/2,\pi)$ negativ ist, bleibt nur $(0,\pi/2)$ zu untersuchen.

Behauptung: Auf $(0,\pi/2)$ ist $tan(x) > x$.

Dazu kann man etwa die Funktion $tan(x) - x$ mit Mitteln der Differentialrechnung (etwa Aufgabe 41) untersuchen. Alternativ kann man mit dem Satz von Rolle (Skript S.147) argumentieren.

Nach dem Satz von Rolle, angewandt auf $tan(x)$ und das Intervall $[0,x]$, folgt: Es existiert ein $\xi \in (0,x)$ mit

$$1 + tan^2(\xi) = \frac{tan(x) - tan(0)}{x - 0} = \frac{tan(x)}{x}.$$

Äquivalent: $tan(x) = x(1 + tan^2(\xi))$ für ein $\xi \in (0,x)$. Da der Ausdruck in der Klammer > 1 ist, folgt die Behauptung.

Also ist $f'(x) \neq 0$ für alle x im Definitionsbereich. Da f' stetig ist und $f'(\pi/2) = 2 > 0$, folgt, dass die Ableitung überall > 0 ist, also ist f nach Aufgabe 41 streng monoton wachsend. Also ist f umkehrbar.

Aus dem Satz über die Umkehrfunktion (S.144) und $f(\pi/2) = \pi$ folgt $(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{f'(\pi/2)} = \frac{1}{2}$.