

## Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 10, Abgabe bis zum 19.12.2008 um 11:00 Uhr

**Aufgabe 37** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion. Man beweise:

- (a) Ist  $f$  stetig und  $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ , so ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .  
(b) Die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

ist stetig.

(2+2 = 4 Punkte)

**Aufgabe 38** (a) Untersuche, welche der angegebenen Funktionen  $f$  auf ihrem Definitionsbereich  $D(f)$  gleichmäßig stetig sind:

- (i)  $D(f) = [0, \infty)$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .  
(ii)  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

(b) Ist jede beschränkte stetige Funktion  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bereits gleichmäßig stetig?

(4+2 = 6 Punkte)

**Aufgabe 39** Beweise, dass das Integral

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx$$

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

(3 Punkte)

**Aufgabe 40** (a) Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine gleichmäßig stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

existiert. Zeige:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(b) Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine monoton fallende Funktion, so dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

existiert. Zeige:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 0.$$

(3+2 = 5 Punkte)

**Aufgabe 40.5** (Freiwillige Zusatzaufgabe) Bringe zur nächsten Übungsgruppe Plätzchen oder selbstgemachten Kuchen mit.  
(Viele Sympathiepunkte)