

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 10, Abgabe bis zum 19.12.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 37 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Man beweise:

- (a) Ist f stetig und $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
(b) Die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

ist stetig.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 38 (a) Untersuche, welche der angegebenen Funktionen f auf ihrem Definitionsbereich $D(f)$ gleichmäßig stetig sind:

- (i) $D(f) = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$.
(ii) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

(b) Ist jede beschränkte stetige Funktion $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bereits gleichmäßig stetig?

(4+2 = 6 Punkte)

Aufgabe 39 Beweise, dass das Integral

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx$$

konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

(3 Punkte)

Aufgabe 40 (a) Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

existiert. Zeige:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion, so dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

existiert. Zeige:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 0.$$

(3+2 = 5 Punkte)

Aufgabe 40.5 (Freiwillige Zusatzaufgabe) Bringe zur nächsten Übungsgruppe Plätzchen oder selbstgemachten Kuchen mit.
(Viele Sympathiepunkte)