Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 1, Abgabe bis zum 17.10.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 1) Sei M eine Menge und A, B, $C \subset M$. Man zeige

(a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$,
(b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$,
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(1+1+1+1 = 4 Punkte)

Aufgabe 2) Sei K ein Körper (wie im Skript, nur dass wir beliebige Mengen statt nur der Menge $\mathbb{R}$ zulassen) und $x, y \in K$. Folgere aus den Körperaxiomen:

(a) $(-x)y = -(yx)$,
(b) $(-x)(-y) = xy$,
(c) $-(y - x) = x - y$,
(d) $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$, falls $x \neq 0$.

(1+1+1+1 = 4 Punkte)

Aufgabe 3) Versucht man Gleichungen wie etwa $3x = 5$ zu lösen, stellt man fest, dass die Lösbarkeit davon abhängt, welche Zahlen man erlaubt: Die obige Gleichung hat zwar ganze Koeffizienten, aber keine Lösung in den ganzen Zahlen. Erweitert man aber den Zahlbereich zu den rationalen Zahlen, ist die Gleichung lösbar. Analog ist etwa die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht in den reellen Zahlen lösbar. Auch hier bietet es sich an, den Bereich der erlaubten

Lösungen zu vergrößern. Wir wollen hier eine recht allgemeine Konstruktion kennenlernen, mit der man von einem Körper F zu einem größeren Körper K übergeht.

Für einen Körper F und ein Element $d \in F$ betrachten wir die Menge $K := \{ \ (x, y) \ \mid x, y \in F \ \}$ und die Verknüpfungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$, die durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 + d y_1 y_2 \, , \, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

gegeben sind. Man kann zeigen, dass $(K, +, \cdot)$ alle Körperaxiome bis auf eventuell die Existenz des Inversen bzgl. der Multiplikation erfüllt.

(a) Was ist das Nullelement 0_K und das Einselement 1_K von K?

(b) Beweise das Distributivgesetz sowie das Assoziativgesetz der Multiplikation in K.

(c) Zeige, dass K genau dann ein Körper ist, wenn die Gleichung $x^2 = d$ keine Lösung für $x \in F$ hat.

Hinweis: Sei $z \in K$ ein beliebiges Element $\neq 0_K$. Dann erfüllt das inverse Element z^{-1} - falls existent - die Gleichung $z \cdot z^{-1} = 1_K$.

(1+1+3 = 5 Punkte)

Aufgabe 4) Wir betrachten folgendes Spiel: Man zeichne nebeneinander eine Reihe von n Quadraten und stelle einen schwarzen Bauern auf das erste Quadrat und einen weißen Bauern auf das letzte Quadrat. Die beiden Spieler wechseln sich in ihren Zügen ab. Bei einem Zug darf man seine Figur um ein oder zwei Felder vor- oder rückwärts bewegen, aber nur, wenn dabei der gegnerische Bauer nicht übersprungen wird. Spieler 1 beginnt das Spiel mit dem weißen Bauern. Ein Spieler hat verloren, wenn er keinen geeigneten Zug mehr machen darf. Gibt es eine Möglichkeit für einen Spieler, durch richtiges Ziehen den Sieg zu erzwingen? Wenn ja, wie?

(3 Punkte)