Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 1, Lösungshinweise

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 1 Exemplarisch sei hier c) vorgeführt: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
&x \in A \cap (B \cup C) \\
\Leftrightarrow &x \in A \text{ und } x \in B \cup C \\
\Leftrightarrow &x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } C) \\
\Leftrightarrow &(x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
\Leftrightarrow &x \in A \cap B \text{ oder } x \in A \cap C \\
\Leftrightarrow &x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Also sind die beiden obigen Mengen jeweils ineinander enthalten und folglich gilt Gleichheit.

Aufgabe 2 Exemplarisch sei hier d) vorgeführt:

$(-x)^{-1}(-x) = (-x)(-x)^{-1} = 1$.
Mit b) gilt: $(-x^{-1})(-x) = x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.
Also sind $(-x)^{-1}$ und $-(x^{-1})$ Lösungen von $z(-x) = 1$.
Also $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

Aufgabe 3 Sei zunächst d so, dass keine Lösung von $x^2 = d$ existiert. Sei $(a, b) \neq (0, 0)$ aus K. Gesucht ist ein inverses Element von (a, b) bzgl. der

Multiplikation. Für $(a,b) \neq (0,0)$ gilt:

$$a^2 - db^2 \neq 0 \ .$$

Sonst würde aus $a^2 - db^2 = 0$ dann $a^2 = db^2$ folgen. Falls $b = 0$, gilt $a^2 = 0$, $a = 0$, $(a,b) = (0,0)$. Widerspruch. Ist $b \neq 0$, so folgt $(a/b)^2 = d$. Widerspruch zur Annahme über d.

Also existiert

$$\left(\frac{a}{a^2 - db^2} \ , \ \frac{-b}{a^2 - db^2} \right) \in K \ ,$$

wobei man sich jetzt durch Nachrechnen leicht überzeugen kann, dass es sich um das gesuchte Inverse handelt:

$$\begin{aligned} &(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 - db^2}, \frac{-b}{a^2 - db^2} \right) \\ =&\left(a\frac{a}{a^2 - db^2} + db\frac{-b}{a^2 - db^2}, a\frac{-b}{a^2 - db^2} + b\frac{a}{a^2 - db^2} \right) \\ =&(1,0) \ . \end{aligned}$$

Die Umkehrung funktioniert fast genauso: Die Gleichung $z^{-1}z = 1_K$ führt auf ein 2x2-lineares Gleichungssystem, dass die obige Form des Inversen erzwingt. Hat aber $x^2 = d$ eine Lösung, ist das Inverse nicht wohldefiniert (Nenner $= 0$).

Man sagt, der Körper K ist aus F durch *Adjunktion* einer Quadratwurzel von d zu F entstanden. Im Fall $F = \mathbb{R}$ und $d = -1$ nennt man den so erhaltenen Körper den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. In der Regel schreibt man für $(a,b) = a + b\sqrt{d}$, also im Fall $K = \mathbb{C}$ $(a,b) = a + \sqrt{-1}b := a + ib$. Ist $F = \mathbb{Q}$ und $d \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, so erhält man nach Aufgabe 5 ebenfalls einen Körper, den man mit $\mathbb{Q}(d)$ bezeichnet. Das verallgemeinert die letzte Aufgabe auf dem ersten LA-Zettel. Solche Körper sind Spezialfälle von sogenannten *Zahlkörpern*, die in der Zahlentheorie eine große Rolle spielen.