Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Probeklausur

Diese Probeklausur soll a) als Test für euch selber dienen, b) die Vorbereitung auf die Klausur erleichtern und c) die Möglichkeit geben, Zusatzpunkte zu holen.

Bitte testet euch selber! Versucht, den Multiple choice Teil sowie die Aufgaben zuerst alleine und ohne Skript oder Bücher zu lösen.

Der Multiple choice Teil sowie die Aufgaben 3, 10, 11b, 13, 14, 17 *können* bis zum 09.01.09 abgegeben werden. Die erreichten Punkte (maximal 63) werden durch 7 geteilt und als Zusatzpunkte gewertet. Der Aufgabenteil ist wesentlich umfangreicher als bei der Klausur und soll auch dazu dienen, einige Wiederholungsaufgaben bereitzustellen.

Zur Wertung beim Multiple choice Teil: Jedes richtige Kreuz gibt 2 Punkte, jedes falsche Kreuz bzw. jede nicht angekreuzte richtige Antwort geben -2 Punkte. In der Addition aller Multiple choice Punkte kann man aber im schlechtesten Fall 0 Punkte erreichen.

Beispiel 1: Welche Vorlesung ist die beste Vorlesung des ersten Semesters?

Lineare Algebra 1 ☐ ☒ Analysis 1 ☐ Theoretische Physik 1

Klarer Fall: 2 Punkte.

Beispiel 2: Treffen folgende Aussagen auf die Analysisvorlesung zu?

Die Übungszettel sind zu schwer ☒
Ich würde viel lieber Jura studieren ☐
Die Vorlesung ist toll ☒

Antwort c) ist natürlich richtig. Leider wird das durch den haarsträubenden Fehler in Teil a) zunichte gemacht, so dass sich insgesamt 0 Punkte ergeben.

Multiple choice

(1) Ist (x_n) eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum x_n$.

JA ☐ ☐ NEIN

(2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.

JA ☐ ☐ NEIN

(3) Die Folge (x_n) konvergiert gegen x, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß für alle $N_\epsilon > 0$ ein $n \geq N(\epsilon)$ existiert, mit der Eigenschaft: $|x_n - x| < \epsilon$.

JA ☐ ☐ NEIN

(4) Für eine positive reelle Folge (x_n) mit der Eigenschaft $x_n < 1/n$ konvergiert $\sum x_n$.

JA ☐ ☐ NEIN

(5) Eine konvergente Folge besitzt Teilfolgen, welche CAUCHY–Folgen sind.

JA ☐ ☐ NEIN

(6) Die Folge (x_n) konvergiert, falls die Folge (x_n^2) konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

(7) Die Folge $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

(8) Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn die Folge $(1/x_n)$ konvergiert.

JA ☐ ☐ NEIN

(9) Aus $|x_n| \leq C_n$ und $\sum C_n < \infty$ folgt die absolute Konvergenz der Reihen $\sum x_n$ und $\sum C_n$.

JA ☐ ☐ NEIN

(10) Für eine reelle Folge (x_n) mit der Eigenschaft $0 < x_n < \frac{1}{n^2}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$.

IMMER ☐ ☐ NIEMALS ☐ MANCHMAL

(11) Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung zwischen Mengen. Dann kann gelten:

A ist eine echte Teilmenge von B $\square$
B ist eine echte Teilmenge von A $\square$

(12) Folgen ohne Häufungspunkt

können nicht beschränkt sein $\square$ $\square$ können nicht monoton sein
können nicht konvergent sein $\square$

(13) Wenn eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann sie nicht nur in genau einem Punkt stetig sein. JA $\square$ $\square$ NEIN

(14) Für jede monoton steigende Folge (x_n) positiver reeller Zahlen ist x_n^{-1} eine Cauchyfolge

JA $\square$ $\square$ NEIN

(15) Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergieren. Welche der folgenden Implikationen gelten?

f_n stetig $\Rightarrow f$ stetig $\square$
f_n Regelfunktion $\Rightarrow f$ Regelfunktion $\square$
f_n differenzierbar $\Rightarrow f$ differenzierbar $\square$

Definitionen

Man vervollständige folgende Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (D Intervall) heißt gleichmäßig stetig, falls ...

Man vervollständige folgende Definition: Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, falls ...

Aufgaben

Aufgabe 1 (a) Man drücke die Zahl $\frac{1}{1+2i}$ in der Form $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ aus.

(b) Man schreibe $1 + i$ in der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ $(r > 0)$.

Aufgabe 2 Man untersuche die Folge (x_n),

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

auf Konvergenz (mit Begründung).

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur rationale Werte annimmt. Man zeige, dass f konstant ist. (5 Punkte)

Aufgabe 4 Man beweise durch vollständige Induktion:

$$1 + 4 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 5 Für welche $\alpha < 0$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx \text{ ?}$$

Man berechne es.

Aufgabe 6 Für welche x konvergiert die Reihe

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \text{ ?}$$

Man gebe ggf. ihren Wert an.

Aufgabe 7 Man zeige: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ für alle $\alpha > 0$

Aufgabe 8 Man bestimme (mit Begründung) die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n; \ \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Aufgabe 9 Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 10 Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass f^2 stetig ist. Ist dann auch f stetig (mit Begründung)? (5 Punkte)

Aufgabe 11 (a) Man untersuche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \cdot sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

auf i) Stetigkeit in 0 und ii) Differenzierbarkeit in 0.

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \cdot sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung. (5 Punkte)

Aufgabe 12 Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe 13 Man zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+2^x} = \sqrt{x}$$

in $[0,1]$ eine Lösung hat. (5 Punkte)

Aufgabe 14 Man berechne die Ableitung von $(cos(x^2))^2$. (3 Punkte)

Aufgabe 15 Man untersuche (mit Begründung) die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}.$$

Aufgabe 16 Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion darstellt (man nenne benützte Resultate aus der Vorlesung).

Aufgabe 17 Man zeige, dass die Funktion $x \cdot log(x)$ in $(0, \infty)$ ein globales Minimum besitzt und bestimme es. (5 Punkte)

Aufgabe 18 Man gebe (Begründung nicht notwendig) die Limiten folgender Folgen an:

$$\frac{2n^2 - 10n + 6}{n - 4n^2 + 7}; \quad \sqrt{n^2 + 1} - n; \quad n^{-\frac{1}{3}} sin(n).$$