RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Die Transzendenz von e und π

FLORIAN STUMPF

AUSARBEITUNG ZUM VORTRAG IM *Proseminar Überraschungen und Gegenbeispiele in der Analysis* (SOMMERSEMESTER 2009, LEITUNG PD DR. GUDRUN THÄTER)

Zusammenfassung: Die meisten Leser können sich wohl unter den Begriffen natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen oder auch irrationale Zahlen etwas vorstellen, oder können sogar eine Definition liefern. Anders sieht es hingegen wohl schon bei den Begriffen algebraische Zahlen oder transzendente Zahlen aus. Und dies obwohl der weitaus größte Teil der reellen Zahlen zu den transzendenten Zahlen gehört. Auch die über die Mathematik hinaus bekannten Zahlen e und π sind solche Zahlen. Und genau dies soll hier gezeigt werden. Dazu wird zunächst die Irrationalität von e und π über den Weg des Widerspruchs bewiesen und anschließend aus dem Theorem von Lindemann die Transzendenz der beiden hergeleitet. Womit ganz nebenbei auch bewiesen wird, dass die 'Quadratur des Kreises' unmöglich ist. Besonders auffallend an den Beweisen ist die Tatsache, dass man durch geschickt konstruierte Hilfsfunktionen sehr anschaulich zu den gewünschten Lösungen gelangt.

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Zahlen

In der Mathematik ist der folgende Aufbau der Zahlen üblich: Man beginnt mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die manchmal mit der 0, manchmal aber auch erst mit der 1 beginnen. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Diese erweitert man dann mit dem negativen Vorzeichen und erhält so die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$. Hinzu kommt jetzt die Division, so dass man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ erhält. Dass es aber noch mehr Zahlen geben muss, sieht man zum Beispiel ganz leicht an der Diagonalen in einem Quadrat mit den Seitenlängen 1. Denn diese muss nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2}$ haben. Diese neu dazu gewonnen Zahlen werden irrationale Zahlen genannt und mit $\mathbb{I}$ bezeichnet. Die Vereinigung von $\mathbb{I}$ und $\mathbb{Q}$ nennen wir dann die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$. Anschaulich lässt sich der Aufbau wie folgt darstellen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Doch es gibt noch weitere Zahlenmengen die unterschieden werden können. Diese sind die algebraischen und die transzendenten Zahlen, zu denen wir nun kommen werden.

Bemerkung 1.1 Natürlich lassen sich die reellen Zahlen auch noch zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern, da wir hier aber bis auf die Ausnahme von i die komplexen Zahlen nicht benötigen, werden diese hier weitgehend vernachlässigt.

Definition 1.2 Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ (oder auch $\in \mathbb{C}$) wird algebraische Zahl genannt, wenn es ein nicht konstantes Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x^1 + a_0$ mit rationalen Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Q}$ für $j = 0, ..., n$ gibt, so dass $p(b) = 0$ gilt. Die Menge dieser Zahlen und wird mit $\mathbb{A}$ bezeichnet.

$$\mathbb{A} := \{\eta \in \ \mathbb{R} : \text{es existiert ein}\, p \in \mathbb{Q}[X], p \neq 0 : p(\eta) = 0\},$$

wobei $Q[X]$ die Menge aller Polynome mit der Variablen x und Koeffizienten aus der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist.
Die Algebraischen Zahlen lassen sich (über $\mathbb{R}$) wie folgt einordnen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$$

Bemerkung 1.3 Da $\mathbb{A}$ eine algebraische Erweiterung zum Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist, ist auch $\mathbb{A}$ wieder ein Körper und damit gegenüber der Addition und der Multiplikation abgeschlossen.

Beispiel 1.4 Die natürliche Zahl 5 ist algebraisch, da gilt:
mit $p_1(x) := x^2 - 25$ ist $p_1(5) = 0$.
Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist ebenfalls algebraisch, da gilt:
mit $p_2(x) := x^2 - 2$ ist $p_2(\sqrt{2}) = 0$.
Alle rationalen Zahlen sind algebraisch. Da sich rationale Zahlen, als $x := \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben lassen, sind sie immer die Lösung der Gleichung $bx - a = 0$.

Bemerkung 1.5 Da wir hier auf die komplexen Zahlen verzichten, uns später aber noch die Zahl i begegnet soll hier kurz erwähnt werden, dass i algebraisch ist, denn i ist die Nullstelle des Polynoms $p_4(x) := x^2 + 1$.

2 Transzendente Zahlen

2.1 Behauptung

Neben den algebraischen Zahlen gibt es noch eine weitere Teilmenge in $\mathbb{R}$, und zwar die transzendenten Zahlen $\mathbb{T} := \mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$ und $\mathbb{T} \neq \emptyset$.

2.2 Beweis

Jedem Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ wird eine ganze Zahl h zugeordnet: $h := |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0|$.
(Anmerkung: Man nennt h auch die „Höhe“ des Polynoms)
Da nun aber die $a_i \in \mathbb{Q}$ sind und $\mathbb{Q}$ bekanntlich abgeschlossen gegenüber der Addition ist folgt, dass auch $h \in \mathbb{Q}$ sein muss. Mit dem „Ersten Cantorschen Diagonalverfahren“[5] lässt sich zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar (unendlich) ist. Somit gibt es nur abzählbar unendlich viele Möglichkeiten für h und da jedes Polynom vom Grad n maximal n Nullstellen hat, ist somit die Anzahl der Nullstellen aller Polynome $\in \mathbb{Q}[X]$ abzählbar. Daraus folgt direkt, dass die Anzahl der algebraischen Zahlen abzählbar ist.
Mit dem „Zweiten Cantorschen Diagonalverfahren“[5] lässt sich zeigen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Das heißt, dass $\mathbb{T} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{A} \neq \emptyset$ und nicht nur das. Hiermit wurde sogar gezeigt, dass es mehr transzendente Zahlen als algebraische oder rationale Zahlen gibt, und das obwohl sie kaum einer kennt.

2.3 Irrationalität als Voraussetzung von Transzendenz

Die Tatsache, dass alle rationalen Zahlen algebraisch sind, wurde bereits gezeigt. Aus $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ und $\mathbb{T} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$ folgt daher direkt $\mathbb{T} \subset \mathbb{I}$. Es gilt: Alle transzendenten Zahlen müssen irrational sein. Daher werden wir auch zunächst die Irrationalität von e und π zeigen bevor wir uns der Transzendenz zuwenden.

3 Einführung von e und π

3.1 π

π gehört wohl zu den bekanntesten Zahlen, wenn es nicht sogar die bekannteste ist. Fragt man jemanden nach π, so werden die meisten wohl antworten, das π ungefähr $3,14$ ist doch mittlerweile sind eine Billionen Nachkommastellen von π bekannt. Zur Veranschaulichung einmal die ersten hundert Stellen:

$$\begin{aligned}\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494...\\ ...4459230781640628620899862803482534211706 79...\end{aligned}$$

Doch warum macht man sich überhaupt die Mühe diese Stellen zu berechnen? Die Frage lässt sich wohl am ehesten damit beantworten, dass π der Quotient aus dem Umfang eines Kreises und dessen Durchmesser ist, π uns also von der Natur vorgegeben wurde. Daher beschäftigten sich auch schon die Griechen in der Antike mit π und näherten sich diesem bis auf $\frac{22}{7}$ an. Auch wir wollen nun eine erste Abschätzung von π wagen. Wir wollen anschaulich zeigen, dass $3 < \pi < 4$, siehe Abb. 3.1. Bekanntlich ist ja der Umfang des Kreises $2\pi r$, das heißt der Weg über den halben Kreis beträgt πr, der um

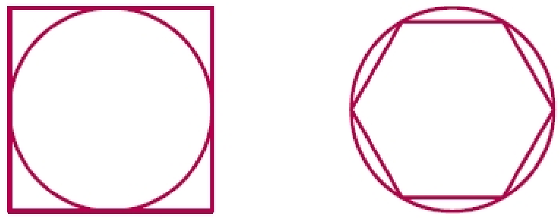

Abbildung 3.1: Anschauliche Abschätzung von π. [3]

das halbe Quadrat aber $4r$ und er ist länger $\Rightarrow 4r > \pi r \Rightarrow 4 > \pi$. Analog kann man bei dem regelmäßigen Sechseck vorgehen. Dort ist der Weg $3r$ lang und kürzer als über den Kreis $\Rightarrow 3r < \pi r \Rightarrow 3 < \pi$. Weiterhin sieht man auch, dass π näher an 3 als an 4 liegt.
Neben dieser sehr anschaulichen, dafür im ersten Schritt auch sehr groben Abschätzung für π, gibt es noch weitere Darstellungen, von denen hier zwei kurz erwähnt werden sollen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi}{6} \quad [1]$$

oder das Wallis Produkt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)} = \frac{\pi}{2} \quad [1]$$

Doch zunächst zu e.

3.2 e

e wird häufig Eulersche Zahl genannt, was einen vermuten lassen könnte, dass der Schweizer Mathematiker Euler sie entdeckt hat. Dem ist aber nicht so. Auch wenn sich Euler mit e befasst hat und sich vor allem seine Notation durchgesetzt hat, war die Zahl schon vorher bekannt. Auch hier zur Veranschaulichung zunächst einmal die ersten hundert Stellen:

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995957496 69...$$
$$...67627724076630353547594571382178525166427 4...$$

Auch für e gibt es natürlich mathematische Approximationen wie:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n,$$

eine weitere Darstellung wäre auch

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

was der Exponentialreihe

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

mit $x = 1$ entspricht.

Bei dieser wollen wir nun zeigen dass sie konvergiert und e zwischen $2,5$ und 3 liegt:

Dafür benötigen wir zunächst die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

Die Konvergenz der Reihe folgt direkt aus dem Quotientenkriterium. Kommen wir also zur Abschätzung:

Schreiben wir uns die ersten vier Summenglieder auf, so sehen wir:

$$S_3 := \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \geq 2,5$$

Die Partialsumme lässt sich auch nach oben mit Hilfe der Geometrischen Reihe abschätzen durch:

$$\begin{aligned} S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 - (\frac{1}{2})^n < 3. \end{aligned}$$

Somit wissen wir nun: $2,5 \leq e \leq 3$.

4 Die Irrationalität von π und e

Nachdem wir nun die beiden Zahlen eingeführt und abgeschätzt haben, wollen wir zeigen, dass diese zu den irrationalen Zahlen gehören, denn zur Erinnerung $\mathbb{T} \subset \mathbb{I}$. Somit ist die Irrationalität Voraussetzung für die Transzendenz.

4.1 e ist irrational

Kommen wir zunächst zu e, hier werden wir annehmen, dass e rational sei und zeigen dann mit den oben eingeführten $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.
Es gilt: $e - S_n > 0$ und weiter

$$\begin{aligned}
e - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + ... \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + ...) \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ...) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)})^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)}} \\
&= \frac{1}{(n+1)! - \frac{(n+1)!}{(n+1)}} = \frac{1}{n! \cdot (n+1) - n!} = \frac{1}{n! \cdot n}
\end{aligned}$$

Somit lässt sich zusammenfassen: $0 < e - S_n < \frac{1}{n! \cdot n}$.

Nehmen wir nun an, e sei rational, dann ließe sich e in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $q \neq 1$ (wir wissen ja bereits $2,5 < e < 3$ und $e \notin \mathbb{Z}$)

$$0 < \frac{p}{q} - S_n < \frac{1}{n!n}$$

Wählen wir nun $n = q$ so folgt:

$$\begin{aligned}
&0 < \frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!q} \\
&0 < \frac{q!p}{q} - S_q q! < \frac{1}{q} \\
&0 < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{S_q q!}_{\in \mathbb{Z}} < \frac{1}{q} < 1 \;\lightning
\end{aligned}$$

da keine ganze Zahl zwischen 0 und 1 liegt! Wir haben also einen Widerspruch zu unsere Annahme aufgezeigt. Somit lässt sich e nicht als rationale Zahl darstellen.

$$\Rightarrow e \in \mathbb{I} \qquad \square$$

4.2 π ist irrational

Nun wollen wir zeigen, dass auch $\pi \in \mathbb{I}$ gilt. Hierbei werden wir einen ähnlichen Weg wie bei e gehen. Wir werden wieder annehmen, dass $\pi \in \mathbb{Q}$ sei und mit Hilfe zweier geschickt konstruierter Funktionen zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Wenn $\pi \in \mathbb{Q}$ dann lässt sich π schreiben als $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, da $\pi > 0$.

Zunächst wollen wir uns die zwei Hilfsfunktionen f und g definieren als:

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

mit den oben definierten a, b und einem $n \in \mathbb{N}$ das wir später fest wählen werden. Und

$$g(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Mit Hilfe dieser Funktionen werden wir zeigen, dass nach unsere Annahme gelten muss:

(i) $\int\limits_0^\pi f(x)\sin(x)dx \in \mathbb{Z}$

(ii) $0 < \int\limits_0^\pi f(x)\sin(x)dx < 1$

was zu einem Widerspruch führt und so unsere Annahme widerlegt.

Um den Widerspruch herbei zu führen, benötigen wir einige Eigenschaften von $\int\limits_0^\pi f(x)\sin(x)dx$ und daher von f und g, die wir nun herleiten möchten.
Zunächst betrachten wir uns die Ableitungen von f:
Da der Nenner beim Ableiten keine Rolle spielt multiplizieren wir ihn auf die linke Seite:

$$n!f(x) = x^n(a-bx)^n$$

mit dem Binomialtheorem folgt daraus:

$$\begin{aligned} n!f\,(x) &= x^n(a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(-bx) + \binom{n}{2}a^{n-2}(-bx)^2 + ... + (-bx)^n) \\ &= x^n a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}x^{n+1}bx + \binom{n}{2}a^{n-2}x^{n+2}(bx)^2 - ... + (-1)^n b^n x^{2n} \end{aligned}$$

$$n!f'(x) = nx^{n-1}a^n - (n+1)\binom{n}{1}x^n a^{n-1}b + (n+2)\binom{n}{2}x^{n+1}a^{n-2}b^2 + ... + (-1)^n 2nb^n x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned} n!f''(x) &= n(n-1)x^{n-2}a^n - (n+1)n\binom{n}{1}x^{n-1}a^{n-1}b + (n+2)(n+1)\binom{n}{2}x^n a^{n-2}b^2 + ... \\ &\quad ... + (-1)^n 2n(2n-1)b^n x^{2n-2} \end{aligned}$$

...

$n!f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)...1b^n = (-1)^n(2n)!b^n \in \mathbb{Z}$

Da in $n!f^{(2n)}$ kein x mehr enthalten ist, ist die $2n$-te Ableitung konstant und sie ist aus $\mathbb{Z}$. Weiter können wir durch einfaches Einsetzen erkennen, dass gilt:

$$n!f(0) = f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(2n-1)}(0) = 0 \text{ und } f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!b^n$$

Nun wollen wir eine der interessantesten Eigenschaften von f kennen lernen. Es gilt: $f(x) = f(\frac{a}{b} - x)$ mit den oben definierten a, b ($a = \pi b$ und $b = \frac{\pi}{a}$). Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend mit der Achsensymmetrie zu $x = \frac{\pi}{2}$, daher wollen wir sie kurz beweisen:

$$f(\frac{a}{b} - x) = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n(a - b(\frac{a}{b} - x))^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n(bx)^n}{n!} = \frac{(\frac{a}{b} - x)^n b^n x^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n x^n}{n!}$$

Daraus folgt sofort

$$f(\pi) = f(\frac{a}{b} - \pi) = f(\pi - \pi) = f(0) = 0$$

und es lässt sich leicht nachrechnen, dass auch

$$f'(\pi) = f''(\pi) = ... = f^{(2n-1)}(\pi) = 0 \text{ und } f^{(2n)}(\pi) = (-1)^n(2n)!b^n$$

gilt.

Kommen wir nun kurz zu unserer zweiten Hilfsfunktion g, mit den ersten beiden Ableitungen:

$$g'(x) = f'(x) - f'''(x) + f^{(5)}(x) - f^{(7)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n+1)}(x)$$
$$g''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n+2)}(x).$$

Diese benötigen wir um eine Stammfunktion von $f(x)\sin(x)$ zu berechnen. Um es einfacher zu machen behaupten wir, dass $\frac{d(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x))}{dx}$ eine passenden Stammfunktion ist. Dies lässt sich leicht zeigen, denn

$$\begin{aligned}\frac{d(g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x))}{dx} &= g''(x)\sin(x) + g'(x)\cos(x) - g'(x)\cos(x) + g(x)\sin(x) \\ &= g''(x)\sin(x) + g(x)\sin(x) \\ &= \sin(x)(g''(x) + g(x)) \\ &= \sin(x)f(x)\end{aligned}$$

denn wie wir oben sehen können, ist $g''(x) + g(x)$ nichts anderes als $f(x)$, da $f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+2)}(x) = 0$ und sich die übrigen Summanden gegenseitig aufheben.

Nach all dieser Vorarbeit können wir nun endlich den Widerspruch aufzeigen:

(i) $\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \in \mathbb{Z}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx =& [g'(x)\sin(x) - g(x)\cos(x)]_0^\pi \\
=& g'(\pi)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - g(\pi)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - g'(0)\underbrace{\sin(0)}_{=0} + g(0)\underbrace{\cos(0)}_{=1} \;=\; g(\pi) + g(0) \\
=& f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) \\
& + f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(0) \\
=& \underbrace{(-1)^n f^{(2n)}(\pi)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(-1)^n f^{(2n)}(0)}_{\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \in \mathbb{Z} \text{ womit (i) gezeigt ist.}$$

(ii) $0 < \int_0^\pi f(x)\sin(x)dx < 1$

Hierzu finden wir zunächst für $f(x)\sin(x)$ Schranken und zwar:

$$0 < f(x)\cdot\sin(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n! \cdot 2^{2n}}$$

Zunächst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
0 < f(x)\sin(x)dx &\Leftrightarrow 0 < \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin(x) \\
&\Leftrightarrow 0 < \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\
&\Leftrightarrow 0 < x^n(a-bx)^n \\
&\Leftrightarrow 0 < x^n(\pi b - bx)^n \\
&\Leftrightarrow 0 < \underbrace{x^n}_{>0,\, da\, x>0}(\underbrace{b}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(\pi-x)}_{>0})^n
\end{aligned}$$

Womit die linke Ungleichung gezeigt ist. Um die rechte Seite $f(x)\cdot\sin(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n! \cdot 2^{2n}}$ zu zeigen, berechnen wir uns das Maximum der Funktionen $f(x)$ und $\sin(x)$ auf $(0,\pi)$ (das Dank der vorhin angesprochenen Symmetrie bei $\frac{\pi}{2}$ liegt)

Bei $\sin(x)$ ist das leicht zu sehen: Die 1. Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x)$, die 2. Ableitung ist $-\sin(x)$, und es gilt:

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 \quad \text{und} \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Bei $f(x)$ berechnen wir uns die Ableitungen auf einem anderen Weg, als wir es oben bereits gemacht haben, da die neue Darstellung hier besser zu benutzen ist:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{n!}(x^n(a-bx)^n) \\
f'(x) &= \frac{1}{n!}(nx^{n-1}(a-bx)^n + x^n(a-bx)^{n-1}n(-1)) \\
&= \frac{1}{n!}(nx^{n-1}(a-bx)^{n-1}((a-bx)-xb)) \\
&= \frac{1}{n!}(nx^{n-1}(a-bx)^{n-1}(a-2bx))
\end{aligned}$$

Suchen wir nun das Maximum:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\neq 0}(\underbrace{nx_0^{n-1}}_{\neq 0}(a-bx_0)^{n-1}(a-2bx_0)) \\
&\Rightarrow (a-bx_0) = 0 \vee (a-2bx_0) = 0
\end{aligned}$$

1. Fall: $(a-bx_0) = 0 \overbrace{\Leftrightarrow}^{a=\pi b} \pi b - bx_0 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{b}_{\neq 0}\underbrace{(x_0-\pi)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung in $(0,\pi)$

2. Fall: $(a-2bx_0) = 0 \Leftrightarrow \pi b - 2bx_0 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{b}_{\neq 0}(\pi - 2x_0) = 0 \Rightarrow \pi - 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Das bei $\frac{\pi}{2}$ ein Maximum liegt sieht man auch ohne die zweite Ableitung von f, da $f'(\pi) = f'(0) = 0, f(\pi) = f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ und es sonst keine Kandidaten für eine Extremstelle in $(0,\pi)$ gibt.

$$f(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{(\frac{\pi}{2})^n(a-b\frac{\pi}{2})^n}{n!}1 = \frac{\frac{\pi^n}{2^n}(a-\frac{a}{\pi}\frac{\pi}{2})^n}{n!} = \frac{\frac{\pi^n}{2^n}\frac{a^n}{2^n}}{n!} = \frac{\pi^n a^n}{2^{2n}n!}$$

Damit gilt für $x \in (0,\pi)$:

$$0 < f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{2^{2n}n!} \qquad \square$$

Zu beachten ist dabei, dass für $n \to \infty : \frac{\pi^n a^n}{2^{2n}n!} \to 0$
Somit gibt es auch ein n_0, s.d. $\frac{\pi^n a^n}{2^{2n}n!} < \frac{1}{5}$.

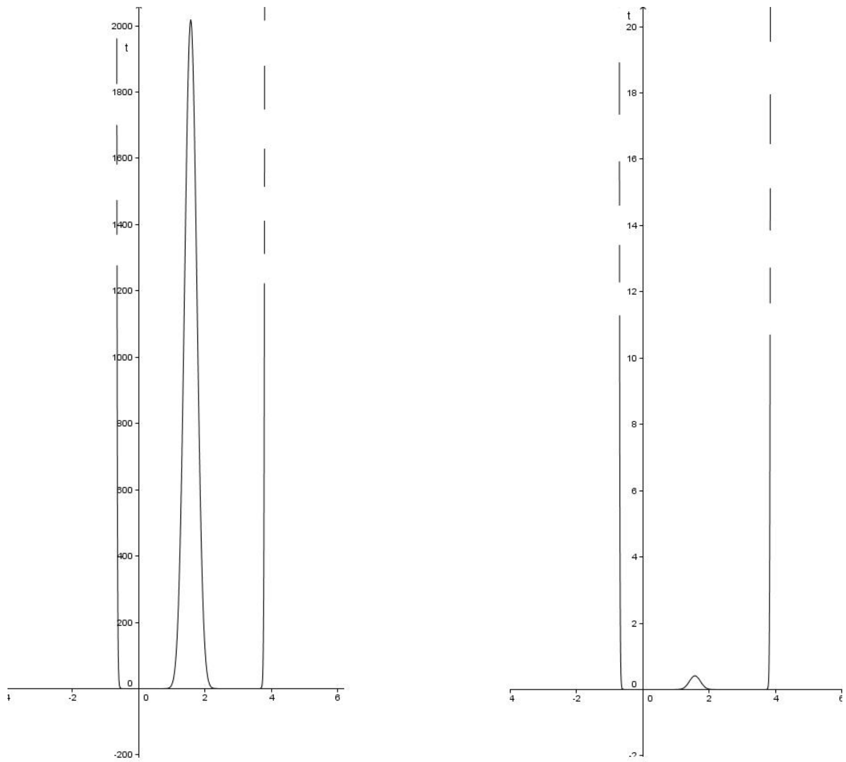

Abbildung 4.1: Zwei Darstellungen von $f(x)\sin(x)$ mit $a = 22$, $b = 7$; links mit $n = 35$ und rechts mit $n = 45$

Nun stellt sich natürlich die Frage, warum man hier $\frac{1}{5}$ wählt und nicht irgend einen anderen Bruch, oder warum überhaupt diese Abschätzung gemacht wurde. Die Antwort ist, dass $5 > \pi$ ist und sich somit das Integral

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx < \frac{1}{5}\pi$$

abschätzen lässt. Man kann sich dies schön veranschaulichen, indem dem man beim Integral an die Fläche unterhalb der Kurve denkt und diese nach oben abschätzt durch Länge (π) mal Höhe ($\frac{1}{5}$).
Der aufmerksamen Leser wird hier wohl schon erkannt haben, dass wir fertig sind, denn wir haben gezeigt:

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin(x)dx < \frac{\pi}{5} < 1$$

und

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \in \mathbb{Z}$$

was zu einem Widerspruch führt und unsere Annahme, das $\pi \in \mathbb{Q}$ liegt, widerlegt. Somit muss gelten $\pi \in \mathbb{I}$. $\square$

5 Die Transzendenz von π und e

Da wir nun wissen, dass π und e irrationale Zahlen sind und somit die Voraussetzung erfüllen auch transzendent zu sein, wollen wir die Transzendenz der beiden Zahlen herleiten. Diese folgt direkt aus dem Theorem von Lindemann:

Theorem 5.1 *Theorem von Lindemann:*
Seien $A_1, ...A_n, a_1, ..., a_n \in \mathbb{A}$ (algebraisch), mit $a_i \neq a_j$, für $i \neq j$ und $A_i \neq 0 \; \forall i$, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i e^{a_i} \neq 0$$

Auf den Beweis dieses Theorems wird hier aus Platzgründen verzichtet, er ist aber in der Literatur angegeben [4].

Behauptung: Die Transzendenz von e und π folgt direkt aus dem Theorem 5.1:

(i) Für e gilt mit $A_i \in \mathbb{Q}$ und $a_i \in \mathbb{N}_0$ nach dem Theorem:

$$A_1 e + A_2 e^2 + ... + A_n e^{an} \neq 0$$

Womit e nicht die Lösung eines nicht konstanten rationalen Polynoms sein kann. $\Rightarrow e \in \mathbb{T}$ $\square$

(ii) Bei π nehmen wir an, es sei algebraisch, dann wäre auch πi algebraisch; wobei hier $i = \sqrt{-1}$ ist und $\mathbb{A}$ abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist. Dann müsste nach dem Theorem von Lindemann gelten:

$$e^{\pi \cdot i} + e^0 \neq 0$$

aber bekanntlich ist $e^0 = 1$ und $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 = -1 \Rightarrow e^{\pi \cdot i} + e^0 = 0$ $\lightning$
Also kann π nicht algebraisch sein und muss transzendent sein. $\square$

6 Resümee

Im Rückblick auf die Arbeit, lässt sich feststellen, dass es überraschend ist, dass die transzendenten Zahlen gemeinhin unbekannt sind, und das obwohl es mehr transzendente Zahlen als zum Beispiel rationale Zahlen gibt. Auch die Tatsache, dass so zwei bekannte und wichtige Zahlen wie e und π transzendent sind ist weitläufig eher unbekannt.
Gut erkennen lässt sich an dieser Arbeit, dass man mit doch eher einfachen Hilfsmitteln, wie dem Quotientenkriterium, dem Binomialtheorem und dem Ableiten zeigen kann, dass sowohl e als auch π irrational sind. Entscheidend war dabei die Idee, beide jeweils als rational anzunehmen und mit geeigneten Funktionen zu zeigen, dass die Funktionswerte ganze Zahlen sind und diese dann zwischen 0 und 1 ein zu schließen. Dabei ist vor allem die Wahl der Funktion entscheidend, und man muss sich vorher überlegen welche Eigenschaften die Funktionen benötigen.

Weiterführend ist es bestimmt interessant sich auch mit der Transzendenz und Irrationalität von anderen Zahlen zu beschäftigen, oder sich einmal zu vergegenwärtigen, warum die oben eingeführten Darstellungen von e und π stimmen und zum Beispiel das Wallis Produkt gerade gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergiert.

Literatur

[1] A.R.Rajwade, A.K. Bhandari: Surprises and Counterexamples in Real Function Theory. Hindustan Book Agency, 2008.

[2] Carl Ludwig Siegel: Transzendente Zahlen. Princeton University Press, 1949.

[3] Ehrhard Behrends: Fünf Minuten Mathematik. Vieweg Verlag, 2006.

[4] Eugene Schenkman: The Independence of Some Exponential Values. In: The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 1 (Jan., 1974), pp. 46-49.

[5] Hannes Stoppel, Birgit Griese: Übungsbuch zur Linearen Algebra. 4. Auflage. Vieweg Verlag, 2003.