RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Das Verfahren von Heron

Hans Bäckel

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Wintersemester 2008/09, Leitung PD Dr. Gudrun Thäter)

Zusammenfassung: Das Verfahren von Heron ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel einer Zahl. Einigen ist das Thema vielleicht schon einmal in der Schule begegnet, wo es manchmal, allerdings meistens nur graphisch, behandelt wird. Das Verfahren selbst begegnet einem ab und zu auch als "babylonisches Wurzelziehen", da das Verfahren urprünglich auf die Babylonier (1700 v. Ch.) zurück geht.
Zunächst verdeutlichen wir uns kurz, wie und wann dieses Vefahren entstanden ist und wer es letztendlich formuliert hat. Da das Verfahren insgesamt sehr anschaulich ist, werden wir uns zunächst an einem Beispiel graphisch klarmachen, was bei diesem Verfahren passiert und danach das Verfahren beweisen. Zum Schluss leiten wir das besprochene Verfahren zur Bestimmung einer Quadratwurzel noch mit Hilfe des bekannten Newton-Verfahrens her. Außerdem werden wir noch einen kleinen Ausblick machen und zeigen, dass man dieses Verfahren auch zur Berechnung der Qubikwurzel oder der k-ten Wurzel verallgemeinern kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Geschichtliches

Schon in der Epoche der Hammurapi um 1700 v. Chr. entwickelten die Babylonier ein Verfahren zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Auf das Problem, die Quadratwurzel einer Zahl bestimmen zu müssen, stießen die Babylonier damals bei der Messung von Flächen, insbesondere bei der Landvermessung. Eine Vorstufe zur Lösung von allgemeinen quadratischen Geleichungen ist die Berechnung der Quadratwurzel. Dieses Verfahren wurde um 100 n. Chr. von dem Griechen Heron von Alexandria aufgegriffen und beschrieben. Deswegen wird dieses Verfarhen heute oft auch *babylonisches Wurzelziehen* oder *Heron-Verfahren* genannt.

1.2 Heron von Alexandria

Heron von Alexandria war ein griechischer Ingenieur, Mathematiker und Vermessungstechniker. Er wirkte um 60 n. Chr. in Alexandria. Überlieferungen zufolge versuchte Heron stets die Wissenschaft eng mit der Praxis zu verbinden. Außerdem hatten seine Werke oft den Charakter einer Formelsammlung. Viele der ihm zugeschriebenen Formeln und Verfahren waren schon vorher bekannt. So soll unter anderem auch die heronsche Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken ursprünglich von Archimedes stammen und wie bereits erwähnt, geht das Heron-Verfahren zum Bestimmung einer Quadratwurzel auf die viele Jahrhunderte vorher lebenden Babylonier zurück.

2 Das Verfahren von Heron

Das Heron-Verfahren dient dazu, die Quadratwurzel einer beliebigen positiven Zahl zu berechnen. Sei also eine beliebige Zahl $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ gegeben. Gesucht ist dann eine Zahl b mit der Eigenschaft

$$b^2 = a$$

2.1 Geometrische Veranschaulichung

Geometrisch bedeutet das Verfahren einfach, dass man ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a konstruieren möchte.

Dem babylonischen Wurzelziehen liegt genau diese geometrischen Idee zugrunde, dass nämlich ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a die Seitenlängen $\sqrt{a}$ hat. Kann man nun das Quadrat nicht direkt konstruieren, so begnügt man sich zunächst einmal mit einem Rechteck, welches aber schon den Flächeninhalt a hat. Man konstruiert so ein gewünschtes Rechteck am einfachsten, indem man eine Seitenlänge gleich a wählt und die andere Seitenlänge einfach 1. So erhält man auf ganz triviale Weise ein Rechteck mit dem Flächeninhalt a. Allerdings sind die gewählten Seitenlängen in den meisten Fällen, außer im trivialen Fall, wenn es sich um die Quadratwurzel von 1 handelt, verschieden, so dass das Rechteck nicht gleichzeitig auch ein Quadrat darstellt. Man versucht nun schrittweise aus dem Anfangsrechteck ein Rechteck zu konstruieren, welches immer mehr der Form eines Quadrats ähnelt.

Hierfür wählt man die eine Seitenlänge des neuen Rechtecks als das arithmetische Mittel der beiden Seitenlängen des Ausgangsdreiecks. Die andere Seitenlänge passt man dann wiederum so an, dass das Rechteck wieder den Flächeninhalt a besitzt. Seien

$$x_0 := a \qquad \text{und} \qquad y_0 := 1$$

die Seitenlängen des Anfangsrechtecks, so ergeben sich die Seitenlängen des neuen Rechtecks also durch folgende Vorschrift

$$x_1 := \frac{x_0 + y_0}{2} \qquad \text{und} \qquad y_1 := \frac{a}{x_1}$$

Die Seitenlängen des nächsten Rechtecks kann man nun weder mit Hilfe der folgenden Vorschrift berechnen

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} \qquad \text{und} \qquad y_2 = \frac{a}{x_2}$$

Verfährt man mit dem gleichen Schema weiter, so ergeben sich die Seitenlängen für das n-te Rechteck durch folgende Iterationsvorschrift

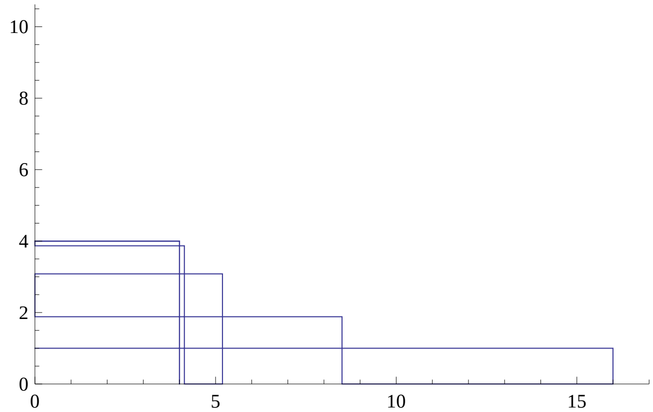
$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad \text{und} \qquad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$$

Dies ist zugleich auch die allgemeine Vorschrift für das Heron-Verfahren. Durch Umformung erhält man somit die folgende Iterationvorschrift, in der nur noch eine Variablen vorkommt. Dies ist zugleich die übliche Schreibweise für das Verfahren von Heron

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Mit Hilfe eines Beispieles kann man gut erkennen, dass mit jedem Iterationsschritt sich die Form des Rechteckes immer weiter zu der eines Quadrats verändert, wobei der Flächeninhalt durch die Konstruktion die ganze Zeit gleich bleibt. Wenn die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, dann entsprechen die Seitenlängen jeweils Nährungswerte für den Wert von $\sqrt{a}$.

Die Berechnung der Quadratwurzel von 16 kann man somit wie folgt geometrische veranschaulichen.
Die entsprechenden Rechnungen, die für die Konstruktion der Rechtecke erforderlich sind, befinden sich unter der Grafik.



$$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{A}{x_0} = \frac{16}{1} = 16$$
$$x_1 = 8,5 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{A}{x_1} = \frac{16}{8,5} \approx 1,8824$$
$$x_2 = 5,1912 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{A}{x_2} = \frac{16}{5,1912} \approx 3,0821$$
$$x_3 = 4,1367 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{A}{x_3} = \frac{16}{4,1367} \approx 3,8678$$
$$x_4 = 4,0023 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{A}{x_4} = \frac{16}{4,0023} \approx 3,9977$$
$$x_5 = 4,0000 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{A}{x_5} = \frac{16}{4,0000} \approx 3,9999$$

Schon nach der vierten Nährung kann man in der obigen Grafik, die durch den Algorithmus entstehenden Quadrate mit dem bloßen Augen nicht mehr unterscheiden, da sie sich nur noch um Nachkommastellen unterscheiden. Nach dem fünften Iterationsschritt ist das Ergebniss schon bis auf vier Stellen nach dem Komma genau.

2.2 Satz von Heron

Sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \geq 0$.
Hierbei steht a für die Zahl, deren Quadratwurzel wir bestimmen wollen und x_0 sei der Startwert. Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich folgende Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Beispiel. Wir wollen uns die Aussage von Satz 2.2 zunächst noch einmal an dem Beispiel zur Berechnung der Quadratwurzel von 16 klarmachen. Als Startpunkt x_0 wählen wir wie in dem obigen Beispiel 1.

Also sei $a = 16$ und $x_0 = 1$, dann ist nach dem 5. Iterationsschritt das Ergebnis schon auf 4. Nachkommastellen genau. (Rechnungen vgl. Abschnitt 2.1)

Beweis. Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst einmal die Funktion $\Phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit

$$\Phi(x) := \frac{x + \frac{a}{x}}{2}, \qquad x \in (0, \infty)$$

mit der folgenden Ableitung

$$\Phi'(x) = \frac{1 - \frac{a}{x^2}}{2}, \qquad x \in (0, \infty)$$

Wir setzen nun $\Phi' = 0$ um die Extrema der Funktion im Intervall $(0, \infty)$ zu bestimmen.

$$\Phi'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1 - \frac{a}{x^2}}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{a}, \qquad x \in (0, \infty)$$

So folgt sofort, dass Φ streng monoton fallend auf dem Intervall $(0, \sqrt{a})$ und streng monoton steigend auf dem Intervall $(\sqrt{a}, \infty)$ ist.

Aus diesen beiden Vorüberlegungen folgt auch sofort, dass für alle $x_0 \in (0, \infty)$ folgende Abschätzung gilt

$$x_1 := \Phi(x_0) \geq \Phi(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}}{2} = \sqrt{a}$$

Somit handelt es sich bei der Iterationsfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Folgengliedern

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) = \frac{x_k + \frac{a}{x_k}}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

ab dem Index $n = 1$ um eine monoton fallende Folge, die nach unten hin durch $\sqrt{a}$ beschränkt ist. □

3 Herleitung

Man kann das Heron-Verfahren, wenn es auch eigentlich viel älter ist, als ein Sonderfall des von Newton entwickelten Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion ansehen. Deswegen folgt zunächst eine kleine Einführung in das Newton-Verfahren.

3.1 Das Newton-Verfahren

(vgl. Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis Teil 1, Wiesbaden 2004, S.204ff)

Das Newton-Verfahren, das auf den gleichnamigen englischen Mathematiker zurück geht, ist ein spezielles Verfahren zur nährungsweisen Auflösung von Gleichungen.

Eine Gleichung $f(x) = 0$ aufzulösen, bedeutet anschaulich, den Schnittpunkt oder die Schnittpunkte der Funktion f mit der x-Achse zu finden. Das Newton-Verfahren beruht nun im wesentlichen darauf, dass wenn man eine Nährungslösung x_0 gefunden hat, die Funktion f durch ihre Tangente an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ersetzt und dann diese wieder zum Schnitt mit der x-Achse bringt. Dieses Verfahren wiederholt man nun so oft bis die Näherung die gewünschte Genauigkeit erreicht hat.

Die Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f(x_0) + (f'(x_0)(x - x_0)$. Somit ergibt sich für die Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse folgende Gleichung $f(x_0) + (f'(x_0)(x - x_0) = 0$, die uns mit Hilfe von Umformungen auch zu dem neuen Nährungswert x_1 führt

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Da x_1, bei geeigneter Wahl des Startwerts x_0, eine Verbesserung von x_0 ist, kann man dieselbe Überlegung jetzt erneut anwenden und erhält schließlich das allgemeine Interationsverfahren von Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3.2 Das Heron-Verfahren als Spezialfall des Newton-Verfahrens

Das allgemeine Problem eine Zahl x zu finden, die die Eigenschaft besitzt $x^2 = a$, ist gleichbedeutend mit der Fragestellung die Nullstelle für die Funktion

$$f(x) = x^2 - a$$

zu finden.
Mit Hilfe der allgemeinen Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens erhält man somit die schon in Abschnitt 2 geometrisch hergeleitete Iterationsvorschrift des Heron-Verfahrens.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n^2 - a)}{2(x_n)} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Man kann somit sagen, dass das Heron-Verfahren ein Spezialfall des Newton-Verfahrens ist.

4 Ausblick

Bisher haben wir nur die Quadratwurzel einer beliebigen positiven Zahl berechnet. Es ist jedoch auch möglich mit dem Verfahren von Heron die 3-te Wurzel oder sogar die k-te Wurzel zu berechnen. Dazu erweitert bzw. verallgemeinert man einfach die Formel von Heron.

4.1 Berechnung der 3-ten Wurzel

Wir wollen nun die 3-te Wurzel einer beliebigen positiven Zahl a berechnen, also eine Zahl x finden, so dass die Gleichung $x^3 = a$ erfüllt ist.
Bei der Bestimmung der 2-ten Wurzel haben wir uns geometrisch gesehen im zweidimensionalen Raum aufgehalten und schrittweise ein Rechteck einem Quadtrat angenährt. Die Quadratwurzel entsprach dann genau der Seitenlänge des Rechtecks.
Im Gegensatz hierzu befinden wir uns bei der Bestimmung der 3-ten Wurzel im dreidimensionalen Raum und nähren nun schrittweise ein Quader einem Würfel an. Hier entspricht dann die Seitenlänge des Würfels nährungsweise dem Wert der 3-ten Wurzel von a.
Wie bei der Bestimmung der Quadratwurzel benötigen wir auch hier Startwerte. Zur Vereinfachung wählen wir zwei Seiten des Quaders mit der gleichen Längen. Es ergeben sich somit folgende Startwerte

$$x_0 := y_0 := 1 \qquad \text{und} \qquad z_0 := V$$

Wie schon bei der Bestimmung der Quadratwurzel, wählt man als neue Nährung der Lösung als das arithmetische Mittel der drei Seiten. Dann ergibt sich, da das Volumen $V = x_0 * y_0 * z_0$ des Quaders bei allen Iterationsschritten gleich bleibt, folgende neue Nährung

$$x_1 := y_1 = \frac{x_0\ y_0\ z_0}{3} \qquad \text{und} \qquad z_1 = \frac{V}{x_0\ y_0}$$

Die Seitenlängen des nächsten Quaders kann man nun wieder mit Hilfe der folgenden Vorschrift berechnen

$$x_2 := y_2 = \frac{x_1\ y_1\ z_1}{3} \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{V}{x_1\ y_1}$$

Verfährt man nach diesem Schema immer so weiter, dann ergeben sich die Seitenlängen des n-ten Quaders mit Hilfe der folgenden Vorschriften

$$x_n := y_n = \frac{x_{n-1}\ y_{n-1}\ z_{n-1}}{3} \qquad \text{und} \qquad z_n = \frac{V}{x_{n-1}\ y_{n-1}}$$

Das Verfahren würde natürlich auch funktionieren, wenn $x_0 \neq y_0$, allerdings wird dann der Rechenaufwand wesentlich höher.

4.2 Berechnung der k-ten Wurzel

Wir wollen nun die k-te Wurzel einer beliebigen positiven Zahl a bestimmen, also eine Zahl x finden, so dass die Gleichung $x^k = a$ erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Problem die Nullstelle folgender Funktion zu finden

$$f(x) = x^k - a$$

Bestimmen wir nun wieder mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Nullstelle der obigen Funktion, so erhalten wir folgende iterative Formel zur Bestimmung einer Näherung für die k-te Wurzel einer beliebigen positiven Zahl a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^k + a}{k{x_n}^{k-1}} = \frac{(k-1)x_n^{k-1} + a}{k{x_n}^{k-1}}$$

Das Verfahren ist allerdings sehr rechenintensiv, da umso größer k ist, immer mehr Schritte notwendig sind, um die Wurzel genau zu berechnen. Außerdem sollte für den Startwert x_0 ein geeigneter Wert gefunden werden, damit weniger Iterationsschritte benötigt werden, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

5 Resümee

Rückblickend wird man bei einer solchen Arbeit, die auf einem Verfahren beruht, welches mehrere tausend Jahre alt ist, wieder einmal daran erinnert, wie lange sich die Menschheit schon mit den Problemen der Mathematik beschäftigt. So stießen schon die Babylonier, bei der Vermessung von Flächen, vor mehr als 3500 Jahren, auf das Problem die Quadratwurzel einer Zahl zu bestimmen. Natürlich sprach man damals noch nicht von der Quadratwurzel, das Problem allerdings war dasselbe. Viele Mathematiker, so auch Heron von Alexandria, fassten diese schon existierenden Verfahren auf und formulierten sie.
Des Weiteren ist interessant, dass dieses Thema in vielen verschiedenen Arten bearbeitet wird. So kann es vorkommen, dass man dieses Verfahren geometrisch anschaulich schon in der Schule kennen gelernt oder eben in einem Seminar, dann natürlich auch mit dem entsprechenden Beweis.
Letztendlich finde ich es erstaunlich, wie viel sich in der Mathematik verändert hat und obwohl man den Eindruck bekommt, dass sie in unserer heutigen Zeit in der Mathematik kaum etwas ändert, sind so viele Probleme noch ungelöst.

Literatur

[1] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis Teil 1. Wiesbaden 2004

[2] Lenze, B.: Basiswissen angewandte Mathematik: Numerik, Grafik, Kryptik. Witten 2007

[3] Tomm L.: Skript zur Analysis 1, Ulm 2005

[4] Ziegenbalg J.: Das babylonisch-sumerische Verfahren zum Wurzelziehen. Karlsruhe 2000